Exercices

Exercice 3. Soit E un K–espace vectoriel. Montrer les propriétés suivantes :
(a) $\forall x \in E,\ 0_K x = 0_E$;
(b) $\forall \lambda \in K,\ \lambda 0_E = 0_E$;
(c) $\forall \lambda \in K, u \in E,\ \lambda u = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$ ou $u = 0$;
(d) $\forall \lambda \in K, u \in E,\ (-\lambda)u = \lambda(-u)$;
(e) $\forall \lambda, \mu \in K, u, v \in E,\ (\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$ et $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$.

Exercice 4. Soient E un K–espace vectoriel, F_1, F_2 deux sous–espaces vectoriels de E. Montrer que $F_1 \cup F_2$ est un sous–espace vectoriel de E si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

Exercice 5. On considère le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Dire si les familles suivantes sont liées, libres ou génératrices.
(a) $U_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ où $v_1 = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}6\\2\\0\end{pmatrix}\ v_3 = \begin{pmatrix}9\\7\\6\end{pmatrix}$.
(b) $U_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ où $u_1 = \begin{pmatrix}12\\3\\9\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}6\\2\\-1\end{pmatrix}\ u_3 = \begin{pmatrix}6\\-2\\4\end{pmatrix}$.

Exercice 6. Dans les cas suivants, dire s'il est possible d'écrire le vecteur u comme combinaison linéaire des v_i.
(a) $E = \mathbb{R}[x]$, $K = \mathbb{R}$, $u = 3 + x + 2x^2 + 21x^3$, $v_1 = 2 + x$, $v_1 = x + 2x^2$, $v_3 = x^2 + x^3$.
(b) $E = \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{C}$, $u = \begin{pmatrix}1+i\\2-i\end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}$.
(c) $E = \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{R}$, $u = \begin{pmatrix}1+i\\2-i\end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 7. Soit K un corps et $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}\}$ une famille de $n+1$ scalaires deux à deux distincts. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n+1\}$, on définit

$$p_i = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n+1,\ k \neq i} (x - \alpha_i).$$

Les p_i sont des éléments de $K_n[x]$, l'espace des polynômes de degré inférieur à n et à coefficients dans K. Montrer que la famille $(p_i)_{i \in \{1, \cdots, n+1\}}$ constitue une base de $K_n[x]$.

Exercice 8. Soient E un K–espace vectoriel et F_1, F_2 et H des sous–espaces vectoriels de E.
(a) Montrer que si $F_1 \subset H$ et $F_2 \subset H$ alors $F_1 + F_2 \subset H$.
(b) Montrer que $F_1 + F_2 = \mathrm{Vect}(F_1 \cup F_2)$.

Exercice 9. Soient E un K–espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous–espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus F_2$. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. Chaque vecteur u_i se décompose sous la forme $u_i = u_{i,1} + u_{i,2}$ avec $u_{i,1} \in F_1$ et $u_{i,2} \in F_2$. Montrer que si la famille $(u_{i,1})_{i \in I}$ est libre, alors il en est de même pour la famille $(u_i)_{i \in I}$.

Exercice 10. Soient $(E, +, \cdot)$ un K–espace vectoriel et G un ensemble tel qu'il existe une bijection φ de G vers E. Pour $u, v \in G$ et $\alpha \in K$, on définit $\alpha \otimes u = \varphi^{-1}(\alpha \cdot \varphi(u))$ et $u \oplus v = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$. Montrer que $(G, \oplus, \otimes)$ est un K–espace vectoriel.

Exercice 11. Soient E un K–espace vectoriel et $E_{i, i \in \{1, \cdots, p\}}$ une famille de sous–espaces de E. Pour $i, j \in \{1, \cdots, p\}$, il est déjà vu à la proposition 5 que la somme $E_i + E_j$ est directe si et seulement si $E_i \cap E_j = \{0\}$. Pour $p \geqslant 3$ sous espace vectoriels $E_{i, i \in \{1, \cdots, p\}}$, la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est dite directe si pour tout $k \in \{2, \cdots, p\}$, $(E_1 + \cdots + E_{k-1}) \cap E_k = \{0\}$.

(*1*) Montrer que si la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe, alors pour tout $i, j \in \{1, \cdots, p\}$, si $i \neq j$ alors $E_i \cap E_j = \{0\}$.

(*2*) On se propose de montrer que la réciproque est fausse. Soient $u, v \in E$ deux vecteurs de E linéairement indépendants. On pose $w = u + v$, $E_1 = \text{Vect}(u)$, $E_2 = \text{Vect}(v)$ et $E_3 = \text{Vect}(w)$.
   - (*a*) Montrer que la somme $E_1 + E_2$ est directe.
   - (*b*) Montrer que $E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = \{0\}$.
   - (*c*) Montrer que la somme $E_1 + E_2 + E_3$ n'est pas directe.
   - (*d*) L'assertion « pour tous $i, j \in \{1, \cdots, p\}$, si $i \neq j$ alors $E_i \cap E_j = \{0\}$ » suffit–elle pour affirmer que la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe ? Justifiez.

Exercice 12. Soit E un K–espace vectoriel de dimension finie et F un sous–espace vectoriel de E. Montrer qu'il existe un sous–espace vectoriel H tel que $F \oplus H = E$.