MIASS 241
MATHÉMATIQUES
(APPLIQUÉES AUX SCIENCES SOCIALES) 4

© El Hadj Touré, Ph D. Sociologie
Département de sociologie, UGB de St-Louis

Leçon 3

Comparaison de deux moyennes: test *t*

14:51 1

1

Au programme

- Comment comparer deux moyennes en termes de différence à l'aide principalement du test ***t*** de Student?
  - Justifier, définir le test ***t*** et reconnaître les situations de recherche où son utilisation est appropriée
  - Analyser un tableau, un diagramme et une courbe des moyennes pour une variable dichotomique
  - Effectuer un test ***t*** et interpréter les résultats en termes de signification statistique
  - Différencier un test bilatéral d'un test unilatéral
  - Calculer et interpréter la mesure d'association êta-carré en termes de signification réelle

14:51 2

2

Différence entre deux moyennes

Exemples de questions de recherche

1. Y a-t-il une différence entre pays sous-développés et développés quant à l'importance de l'espérance de vie?
2. Les garçons sont-ils meilleurs que les filles en statistiques sociales (notes)?
3. Les citadins et les ruraux sont-ils confrontés avec la même ampleur au chômage?
4. Y a-t-il une différence entre hommes et femmes quant à la préférence concernant la taille de la famille?
5. Y a-t-il une différence entre les étudiants absentéistes et non absentéistes quant à la performance à l'examen?

14:51 3

3

Différence entre deux moyennes

Exemple illustratif & justification

- Y a-t-il une différence entre hommes et femmes quant au nombre d'heures passées devant la TV/jour (Fox,1999)?

X [Sexe (Homme / Femme)] → [Temps d'écoute TV/j (0, 1, 2,….heures)] Y

- Or, les tableaux bivariés, et le χ^2, sont limités (Fox,1999)
  - Diversité des valeurs d'une variable quantitative
  - La catégorisation implique une perte :
    - d'information, qui risque de changer la structure de la relation
    - des propriétés mathématiques, et donc de la puissance statistique
  - Nécessité d'un grand nombre de ***n*** pour des % stables
- Le test ***t*** de Student est approprié pour analyser une relation entre une <u>VI dichotomique</u> et une <u>VD quantitative</u>

Différence entre deux moyennes

Définition & logique

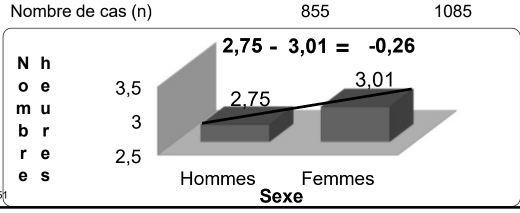
- Le test ***t*** de Student est un <u>test d'hypothèse:</u> on cherche à valider un paramètre supposé à l'aide d'une statistique
- Cette <u>statistique</u> compare deux moyennes d'échantillon
  - Calcul de la moyenne du groupe 1 (temps moyen des hommes)
  - Calcul de la moyenne du groupe 2 (temps moyen des femmes)
  - Calcul de la différence observée entre les deux moyennes
- La différence observée dans ***n*** est-elle suffisamment importante pour être généralisée avec confiance à ***N***?
- À l'instar du test du chi-carré χ^2, on compare le $t_{calculé}$ (statistique) au $t_{critique}$ (table distribution d'échantillonnage)

Différence entre deux moyennes

Illustration: tableau, diagramme & courbe des moyennes

→ Temps passé devant la TV selon le sexe (Fox, p.206)

Temps passé devant la télévision	Sexe	
	Hommes	Femmes
Moyenne (heures)	2,75	3,01
Écart-type	2,03	2,22
Nombre de cas (n)	855	1085



Différence entre deux moyennes

Au-delà de l'observation: la signification statistique

- Il faut s'assurer que la différence observée dans ***n*** est statistiquement significative en utilisant le test ***t***
- Le test ***t*** consiste à comparer cette différence observée et la différence attendue s'il n'y avait pas de relation dans ***N***
  - Si la différence observée est similaire à la différence attendue, alors on peut croire qu'il n'y a vraiment pas de relation (H_0)
  - En revanche, si la différence observée s'écarte vraiment de la différence attendue, alors on peut croire qu'il y a une relation (H_1)

14:51 7

7

Différence entre deux moyennes

Hypothèses statistiques

- Hypothèse nulle (à tester!)
  - Il n'y a pas de différence dans le temps moyen passé devant la TV entre les hommes et les femmes dans N

$\boxed{H_0 : \mu_h = \mu_f \text{ ou de façon équivalente } H_0 : \mu_h - \mu_f = 0}$

- Hypothèse alternative (recherche): de trois choses, l'une!
  - bidirectionnelle : Il y a une différence dans le temps moyen passé devant la TV entre hommes et femmes dans N $H_1 : \mu_h \neq \mu_f$
  - unidirectionnelle : Le temps moyen passé devant la TV chez les hommes est inférieur à celui des femmes dans N $H_1 : \mu_h < \mu_f$
  - unidirectionnelle : Le temps moyen passé devant la TV chez les femmes est supérieur à celui des hommes dans N $H_1 : \mu_f > \mu_h$

14:51 8

8

Test *t* de Student

Formule complète

$$t = \frac{\overbrace{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}^{\text{Différence observée}} - \overbrace{(\mu_1 - \mu_2)}^{\text{Différence attendue}}}{\underbrace{s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}}_{\text{Erreur-type}}}$$

$\overline{X}_1$ = moyenne de la VD pour la catégorie 1 de la VI dans l'échantillon
$\overline{X}_2$ = moyenne de la VD pour la catégorie 2 de la VI dans l'échantillon
μ_1 = moyenne de la VD pour la catégorie 1 de la VI dans la population
μ_2 = moyenne de la VD pour la catégorie 2 de la VI dans la population
$s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}$ = erreur-type de la différence entre les moyennes dans ***n***

14:51 9

9

Test *t* de Student

Formule simplifiée

- Puisque la différence attendue s'il n'y avait pas de relation dans ***N*** donne $\mu_1 - \mu_2 = 0$, sous l'hypothèse nulle, on peut simplifier la formule en enlevant $\mu_1 - \mu_2$:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (0)}{s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$

  - Le numérateur est la différence entre les moyennes de la variable dépendante pour les deux catégories dans l'échantillon ***n***
  - Le dénominateur est l'erreur-type (ou écart-type) de la différence entre deux $\bar{X}$ pour tous les échantillons possibles dans ***N***

- La valeur du ***t*** indique à combien d'écarts-types la différence entre deux moyennes se situe par rapport à 0

14:51 10

10

Test *t* de Student

Des erreurs-types

- Erreur-type d'une moyenne $S_{\bar{X}}$
  - Supposons qu'un sondage donne une <u>moyenne observée</u>, et que l'on répète l'expérience de sondage <u>100 fois.</u> Que serait l'écart-type des moyennes de tous les échantillons possibles (<u>68%</u>)?

$$s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}} = \sqrt{s^2 \frac{1}{n}}$$

- Erreur-type d'une différence entre deux moyennes $S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$
  - Si un sondage donne une <u>différence observée</u> entre 2 moyennes, et que l'on répète l'expérience <u>100 fois,</u> que serait l'écart-type des différences de moyennes de tous les échantillons possibles(<u>68%</u>)?

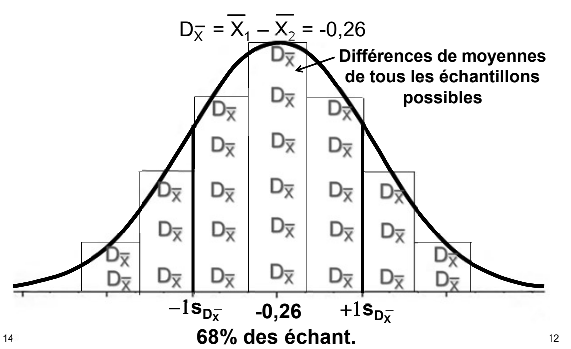
$$S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{s^2 combin\acute{e}e\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

14:51 11

11

Test *t* de Student

Erreur-type de la différence entre deux $\bar{X}$: visualisation



14 12

12

Test *t* de Student

Erreur-type de la différence entre deux $\bar{X}$: formule complète

$$s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\underbrace{\left(\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right)}_{\text{Variance combinée}} \underbrace{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}_{\text{Correction du biais}}}$$

s_1^2 = variance de la variable dépendante pour la catégorie 1

s_2^2 = variance de la variable dépendante pour la catégorie 2

n_1 = le nombre de cas dans la catégorie 1 de la var. indépendante

n_2 = le nombre de cas dans la catégorie 2 de la var. indépendante

$n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2$ = somme des variances pondérées

$n_1 + n_2 - 2$ = degrés de liberté correspondant à $(n_1 - 1) + (n_2 - 1)$

13

Test *t* de Student

Calcul: exemple de Fox (p.214)

→ Pour l'exemple sur le nombre d'heures passées devant la TV selon le sexe, effectuons les calculs conduisant à ***t*** = -2,653

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{D_{\bar{X}}}{S_{D\bar{X}}}$$

Sexe	
Hommes (Catégorie 1)	Femmes (Catégorie 2)
$\bar{X}_1$ = 2,75	$\bar{X}_2$ = 3,01
s_1 = 2,030	s_2 = 2,225
N_1 = 855	N_2 = 1085

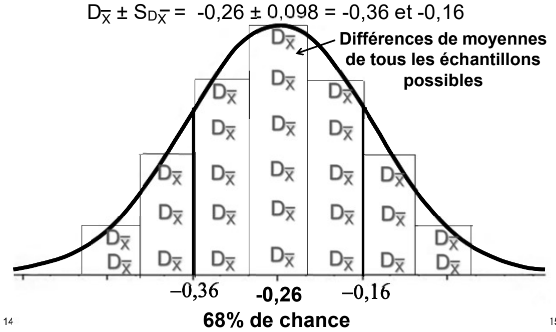
$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{2{,}030^2 * 855 + 2{,}225^2 * 1085}{(855-1)+(1085-1)}\right)\left(\frac{1}{855} + \frac{1}{1085}\right)}} = \frac{-0{,}26}{0{,}098}$$

14

Test *t* de Student

Erreur-type de la différence: interprétation

$D_{\bar{X}} \pm S_{D\bar{X}}$ = -0,26 ± 0,098 = -0,36 et -0,16



15

Test *t* de Student

Étapes préalables à la prise de décision

- Formulons les hypothèses statistiques
  - Hypothèse nulle: il n'y a pas de différence dans le nombre d'heures passées devant la TV chez les hommes et les femmes

    $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ou de façon équivalente $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$
  - Hypothèse alternative <u>bilatérale | bidirectionnelle</u>: il y a une diff. dans le nombre d'heures passées devant la TV chez les H et les F

    $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
- Après le calcul du |***t*** |, calculons les degrés de liberté
  - dl = (855-1)+(1085-1) = 1938
- Fixons le seuil de signification à 0,05 (risque d'erreur 5%)

16

Test *t* de Student

Table statistique (Fox, p.344)

TABLEAU 2 : LA DISTRIBUTION DU *t*

Degrés de liberté (dl)	Seuil de signification pour un test unilatéral					
	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005
	Seuil de signification pour un test bilatéral					
	0,20	0,10	α 0,05	0,02	0,01	0,001
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	1,638	2,353	3,182	4,451	5,841	12,941
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Valeur critique

17

Test *t* de Student

Table statistique: lire et prendre une décision

- Elle présente la <u>valeur critique</u> (minimale) du ***t*** nécessaire au rejet de l'hypothèse nulle pour un degré de liberté ***dl*** et un seuil de signification **a** donnés
- Comment déterminer la sig. statistique d'une relation?
  - Retrouver les ***dl*** dans la colonne de gauche
  - En allant vers la droite, déterminer la valeur critique qui correspond au niveau de signification considéré pour un test donné
  - Si le ***t*** calculé est ≤ à la valeur critique du ***t***, il faudra accepter l'hypothèse nulle et conclure à une absence de différence sig.
  - Si le ***t*** calculé est > à la valeur critique du ***t***, il faudra rejeter l'hypothèse nulle et conclure à l'existence d'une différence sig.

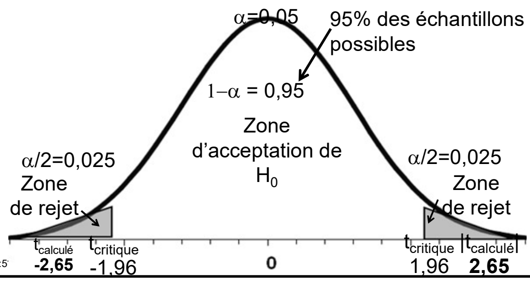
18

Test *t* de Student

Test bilatéral: illustration graphique (α=0,05)

Hypothèse de recherche: il existe une différence entre les hommes et les femmes quant au temps d'écoute de la TV Confirmée!

$H_0 : \mu_h = \mu_f$ $H_1 : \mu_h \neq \mu_f$



19

Test *t* de Student

Décision & conclusion

→Règle de décision: rejet de H_0 si
- $t_{calculé} > t_{critique}$

- Décision: la valeur calculée <u>absolue</u> du ***t*** (2,65) excède la valeur critique du ***t*** (1,96), avec 1938 ***dl*** et un seuil 0,05 pour un test bilatéral. On rejette donc l'hypothèse nulle
  - [Autrement dit, l'écart symbolisé par la valeur 2,65 est différent de 0 et ne serait pas dû au hasard de l'échantillonnage
- Conclusion: il existe une <u>relation statistique significative</u> entre le sexe et le temps d'écoute de la TV. Il y a au moins 95% de chance que la différence H/F existe dans ***N***…

20

Test *t* de Student

Test bilatéral vs. test unilatéral

- Un test bilatéral est utilisé lorsque qu'on s'intéresse seulement à la différence entre les deux moyennes
  - Il considère les deux côtés de la distribution d'échantillonnage
  - Peu importe que ***t*** soit + ou - : $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
  - Il est plus exigeant et donc demeure plus souvent utilisé
- Un test unilatéral est utilisé lorsque la direction de la différence entre les deux moyennes est prédite
  - Il ne considère qu'un côté de la distribution d'échantillonnage
  - Que ***t*** soit + ou - importe: $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ ou $H_1 : \mu_1 > \mu_2$
  - ***t*** est associé à un α 2 fois plus petit (ex: 0,025 contre 0,05)

21

Test *t* de Student

Test bilatéral vs. test unilatéral

TABLEAU 2 : LA DISTRIBUTION DU *t*

	Seuil de signification pour un test unilatéral					
	0,10	0,05 α	0,025	0,01	0,005	0,0005
	Seuil de signification pour un test bilatéral					
	0,20	0,10	0,05 α	0,02	0,01	0,001
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	1,638	2,353	3,182	4,451	5,841	12,941
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	1,296	1,671	2.000	2,390	2,660	3,460
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞ dl	1,282	$\boxed{1,645}$	$\boxed{1,960}$	2,326	2,576	3,291

14:51 22

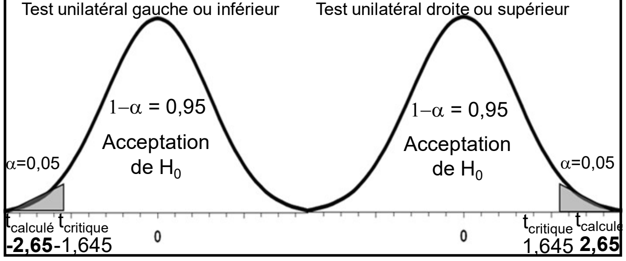
22

Test *t* de Student

Test unilatéral: illustration graphique (α=0,05)

Confirmée!
Les hommes consacrent moins d'heures que les femmes à regarder la TV
$H_0 : \mu_h = \mu_f \quad H_1 : \mu_h < \mu_f$
Test unilatéral gauche ou inférieur

Confirmée!
Les femmes consacrent plus d'heures que les hommes à regarder la TV
$H_0 : \mu_f = \mu_h \quad H_1 : \mu_f > \mu_h$
Test unilatéral droite ou supérieur



23

Test *t* de Student

Au-delà de la sig. statistique: la sig. réelle

- Comme le test du χ^2, le test ***t*** ne renseigne que sur la signification statistique, influencée par le nombre de cas
- Pour évaluer la signification réelle ou la taille de l'effet (intensité), on se réfère à l'êta-carré (varie entre 0 et 1)

$$\eta^2 = \frac{t^2}{t^2+(n1+n2-2)} = \frac{2,65^2}{2,65^2+(855+1085-2)} = 0.0036$$

  – La valeur de η^2 ou E^2 indique la présence d'effet de petite taille (0,0036), d'après la règle de Cohen (1988): le sexe explique 0,36% de la variation dans le temps d'écoute de la TV

Autour de **0,01**	effet de petite taille	(*small effect*)
Autour de **0,06**	effet de taille moyenne	(*moderate effect*)
Autour de **0,14** et plus	effet de grande taille	(*large effect*)

14:51 24

24

Test *t* de Student

Conditions d'application

- Caractère probabiliste de l'échantillonnage
  - Les échantillons des 2 groupes d'observations sont aléatoires
- Normalité de la distribution de la VD quantitative
  - Si ***n>=15*** par groupe, le test ***t*** est robuste (Green & Salkind, 2011)
- Égalité des variances des groupes ou homoscédasticité
  - Si $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ et que l'hétéroscédasticité est forte, deux possibilités:
    - $n_1 = n_2$, le test ***t*** de Student est robuste
    - $n_1 \neq n_2$, le test ***t*** n'est pas robuste, utiliser le test ***t'*** de Welch
- Indépendance des échantillons ou groupes
  - S'ils sont associés ou pairés, utiliser le test ***t*** pairé

14:51 25

25

Tout prochainement

- Prochaine leçon
  - Synthèse & Révision
- Au labo d'Excel d'aujourd'hui
  - Construire et interpréter des tableaux et diagrammes de moyennes illustrant la différence entre deux moyennes
  - Tester la signification statistique de cette différence au moyen du test t de Student, tout en construisant une table statistique du t
  - Mesurer l'intensité ou la signification réelle d'une différence de moyennes au moyen de l'êta-carré

14:51 26

26