Chapitre 2

Applications linéaires

L'objectif de ce chapitre est de « généraliser » à plusieurs variables la notion de proportionnalité. Rappelons que deux variables x et y sont dites proportionnelles s'il existe une constante α telle que $x = \alpha y$. Comment une telle relation se « généralise » t–elle à plusieurs variables ? Dans ce chapitre, nous procéderons à une étude abstraite et générale de la notion de linéarité.

2.1 Définitions et propriétés

Définition 10. Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K. Une application φ de E vers F est dite *linéaire* ou *morphisme d'espace vectoriel* si pour tous $u, v \in E$ et tous $\alpha, \beta \in K$,

$$\varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v).$$

Une application linéaire bijective est dite *isomorphisme*. Une application linéaire de E dans E est dite *endomorphisme* ; un endomorphisme bijectif est dit *automorphisme*. Une application linéaire de E vers le K–espace vectoriel K est dite *forme linéaire*.

Exemple 8. Soit K un corps. Nous avons déjà vu que pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, K^n est un K–espace vectoriel. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. L'application φ de K^n vers K^{n-1}, qui à $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ est un morphisme d'espace vectoriel.

Exemple 9. Soit E un K–espace vectoriel. Pour tout $\lambda \in K \setminus \{0\}$, l'application

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E \\ a &\longmapsto \lambda a \end{aligned}$$

est un automorphisme de E, dit homothétie de rapport λ.

Remarque 5. Si φ est une application linéaire de E vers F, alors
- $\varphi(0_E) = 0_F$, et
- pour tout $v \in E$, $\varphi(-v) = -\varphi(v)$.

En effet, il suffit de remarquer que $\varphi(0_E) = \varphi(0_E + 0_E) = \varphi(0_E) + \varphi(0_E)$; ensuite que $0_F = \varphi(0_E) = \varphi(v + (-v)) = \varphi(v) + \varphi(-v)$.

Proposition 8. Soient E et F deux K–espaces vectoriels. Une application $\varphi : E \longrightarrow F$ est linéaire si et seulement si pour tous $u, v \in E$ et tout $\alpha \in K$
- $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$, et

– $\varphi(\alpha u) = \alpha\varphi(u)$.

La preuve de la proposition ci–dessus est laissée en exercice.

Étant donnée un morphisme d'espace vectoriel de E vers F, la proposition suivante permet d'identifier des sous–espaces vectoriels de F (resp. E) à partir de sous–espaces de E (resp. F).

Proposition 9. Soient E et F espaces vectoriels sur le même corps K et φ une application linéaire de E vers F.

(a) L'image de tout sous–espace vectoriel de E est un sous–espace vectoriel de F.

(b) L'image réciproque de tout sous–espace vectoriel de F est un sous–espace vectoriel de E.

(c) Si φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E vers F, alors la bijection réciproque φ^{-1} est aussi un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve.

(a) Soit V un sous–espace vectoriel de E ; montrons que $\varphi(V) = \{\varphi(v), v \in V\}$ est un sous–espace vectoriel de F. Puisque $0_E \in V$, $\varphi(0_E) \in \varphi(V)$, et donc $\varphi(V) \neq \varnothing$. Soient $w_1, w_2 \in \varphi(V)$ et $\alpha, \beta \in K$; montrons que $\alpha w_1 + \beta w_2 \in \varphi(V)$. Puisque $w_1, w_2 \in \varphi(V)$, il existe $v_1, v_2 \in V$ tels que $\varphi(v_1) = w_1$ et $\varphi(v_2) = w_2$. Ainsi, de la linéarité de φ, on a $\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha\varphi(v_1) + \beta\varphi(v_2) = \varphi(\alpha v_1 + \beta v_2) \in \varphi(V)$ car $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V$; $\varphi(V)$ est bien un sous–espace vectoriel de F.

(b) Soit W un sous–espace vectoriel de F. L'élément 0_E est dans $\varphi^{-1}(\{0_F\}) \subset \varphi^{-1}(W)$; ainsi $\varphi^{-1}(W) \neq \varnothing$.
Soient $\alpha, \beta \in K$ et $v_1, v_2 \in \varphi^{-1}(W)$. On a $\varphi(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha\varphi(v_1) + \beta\varphi(v_2)$. Puisque $v_1, v_2 \in \varphi^{-1}(W)$, on a $\varphi(v_1), \varphi(v_2) \in W$, et donc $\alpha\varphi(v_1) + \beta\varphi(v_2) \in W$. Ainsi $\varphi(\alpha v_1 + \beta v_2) \in W$, ou encore $\alpha v_1 + \beta v_2 \in \varphi^{-1}(W)$; ce qui démontre que $\varphi^{-1}(W)$ est un sous–espace vectoriel de E.

(c) On sait que φ^{-1} est la bijection de F vers E, qui à tout $w \in F$, associe l'unique vecteur $v \in E$ tel que $\varphi(v) = w$. Ainsi, il suffit de montrer que pour tous $w, w' \in F$, $\alpha, \alpha' \in K$, $\varphi^{-1}(\alpha w + \alpha' w') = \alpha\varphi^{-1}(w) + \alpha'\varphi^{-1}(w')$. Puisque φ est un isomorphisme, donc une injection, cela revient à montrer que

$$\varphi\left(\varphi^{-1}(\alpha w + \alpha' w')\right) = \varphi\left(\alpha\varphi^{-1}(w) + \alpha'\varphi^{-1}(w')\right).$$

Or, $\varphi\left(\varphi^{-1}(\alpha w + \alpha' w')\right) = \alpha w + \alpha' w'$ et $\varphi\left(\alpha\varphi^{-1}(w) + \alpha'\varphi^{-1}(w')\right) = \alpha\varphi(\varphi^{-1}(w)) + \alpha'\varphi(\varphi^{-1}(w')) = \alpha w + \alpha' w'$. Ainsi, φ^{-1} est bien un isomorphisme d'espaces vectoriels.

□

2.1.1 Composition d'applications linéaires

Dans le cours d'introduction à l'algèbre, nous avons déjà vu ce qu'est la composé de deux applications. Nous verrons ici que la composée d'applications linéaires est linéaire.

Proposition 10. Soient E, F et G trois K–espaces vectoriels. Si φ_1 et φ_2 sont respectivement des applications linéaire de E dans F et de F dans G, alors $\varphi_2 \circ \varphi_2$ est une application linéaire de E dans G.

Preuve. On sait déjà que $\varphi_2 \circ \varphi_2$ est une application de E dans G. Soient $u, v \in E$ et $\alpha, \beta \in K$. On a $\varphi_2 \circ \varphi_2(\alpha u + \beta v) = \varphi_2(\varphi_1(\alpha u + \beta v))$. De la linéarité de φ_1 et de φ_2, on obtient

$$\varphi_2 \circ \varphi_2(\alpha u + \beta v) = \varphi_2(\alpha\varphi_1(u) + \beta\varphi_1(v)) = \alpha\varphi_2(\varphi_1(u)) + \beta\varphi_2(\varphi_1(v)),$$

ce qui démontre la linéarité de $\varphi_2 \circ \varphi_2$. □

2.2 Noyau, Image

Définition 11. Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K et φ une application linéaire de E dans F. L'ensemble $\varphi^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E : \varphi(x) = 0_F\}$ est (d'après la proposition 9) un sous–espace vectoriel de E ; ce sous–espace vectoriel est dit *noyau* de φ, il est noté Ker φ.
L'ensemble $\varphi(E) = \{\varphi(x), x \in E\}$ est dit *image* de φ, on note Im φ.

Remarque 6. On notera que si φ est injective, la relation $\varphi(x) = 0_F = \varphi(0_E)$ implique $x = 0_E$, et donc Ker $\varphi = \{0_E\}$. Réciproquement, si Ker $\varphi = \{0_E\}$ et $x, y \in E$ sont tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$, on déduit $\varphi(x)-\varphi(y) = \varphi(x-y) = 0_F$, et donc $x-y \in$ Ker $\varphi = \{0_E\}$ ou encore $x = y$; ainsi φ est injective. De ces observations on déduit la proposition ci–dessous.

Proposition 11. Soient E et F deux K–espaces vectoriels et et φ une application linéaire de E vers F.
- De la définition de la surjectivité, φ est surjective si et seulement si Im $\varphi = F$.
- L'application φ est injective si et seulement si Ker $\varphi\{0\}$.

Le résultat ci–dessous permet d'obtenir une famille génératrice de l'image d'un sous–espace vectoriel. Dans le cas où le morphisme est injectif, il permet d'obtenir une famille libre dans l'espace d'arrivée à partir d'une famille libre de l'espace de départ.

Théorème 4. Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K, V un sous–espace vectoriel de E, φ une application linéaire de E dans F et I un ensemble non–vide.
(a) Si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de V, alors $(\varphi(e_i))_{i\in I}$ est génératrice de $\varphi(V)$.
(b) Si φ est injective et si $(e_i)_{i\in I}$ est libre dans E, alors $(\varphi(e_i))_{i\in I}$ est libre dans F.

Preuve.
(a) Soit $w \in \varphi(V)$, il existe $v \in V$ tel que $\varphi(v) = w$. Puisque $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice de V, il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K$, $e_{i_1}, \cdots, e_{i_n} \in (e_i)_{i\in I}$ tels que $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_{i_j}$. Ainsi,

$$w = \varphi(v) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_{i_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi(e_{i_j});$$

w s'écrit donc comme combinaison linéaire des $(\varphi(e_i))_{i\in I}$. Puisque w est quelconque dans $\varphi(V)$, la famille $(\varphi(e_i))_{i\in I}$ est génératrice de W.

(b) Supposons φ est injective et la famille $(e_i)_{i\in I}$ libre. Si $(\varphi(e_i))_{i\in I}$ est liée, il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K$ *non tous nuls* et $e_{i_1}, \cdots, e_{i_n} \in (e_i)_{i\in I}$ tels que

$$0_F = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi(e_{i_j}) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_{i_j}\right).$$

Puisque φ est injective, Ker $\varphi = \{0_E\}$, on déduit $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_{i_j} = 0_E$. Comme la famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre, on obtient $\alpha_j = 0$, pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$. Ce qui contredit le fait que les α_j soient non tous nuls. La famille $(\varphi(e_i))_{i\in I}$ ne saurait être liée.

□

On déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2. Si E et F sont deux K–espaces vectoriels et φ une application linéaire de E dans F, alors si E est de dimension finie, $\varphi(E)$ l'est aussi.

Étant donnée une famille de n vecteurs d'un espace F et une base d'un espace vectoriel E de dimension n, le résultat suivant permet de construire une application linéaire de E dans F telle que l'image de la base coïncide avec la famille de vecteurs.

Théorème 5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Pour toute famille de vecteurs $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ d'un espace vectoriel F sur le même corps K, il existe une et une seule application linéaire φ de E dans F telle que $\varphi(e_i) = v_i, i \in \{1, \cdots, n\}$. De plus, si V est libre, alors φ est injective.

Preuve. Montrons l'existence de φ. Puisque B est une base de E, tout élément $u \in E$ s'écrit sous la forme $u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ où les α_i sont dans K. On définit

$$w = \varphi(u) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

L'application φ ainsi définie est linéaire. En effet, pour tous $\alpha, \beta \in K$, si $u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n \in E$ et $u = \alpha'_1 e_1 + \cdots + \alpha'_n e_n \in E$,

$$\varphi(\alpha u + \beta u') = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha'_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha'_i) v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i v_i = \varphi(u) + \varphi(u').$$

Montrons l'unicité de φ. Soit φ' une application linéaire de E dans F telle que $\varphi'(e_i) = v_i$, $i \in \{1, \cdots, n\}$. Pour tout $u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n \in E$, de la linéarité de φ', on obtient

$$\varphi'(u) = \varphi'\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi'(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \varphi(u);$$

ainsi, $\varphi' = \varphi$.

Montrons à présent que si V est libre, alors φ est injective. Rappelons qu'il suffit de montrer que Ker $\varphi = \{0_E\}$. Soit $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in$ Ker φ. On a $\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$; puisque V est libre, on déduit $\alpha_i = 0_K$ pour tout $i \in \{1 \cdots, n\}$, ou encore $u = 0$; ce qui démontre le résultat. □

Remarque 7. Si E un K–espace vectoriel de dimension finie, pour tout espace vectoriel F sur le même corps K, des théorèmes 4 et 5, on déduit qu'une application linéaire φ de E dans F est injective si et seulement si, il existe une base B de E telle que $\varphi(B)$ soit une base de $\varphi(E)$.

Théorème 6. Un K–espace vectoriel E est de dimension n finie si et seulement si, il est isomorphe à K^n. L'isomorphisme est déterminé de façon unique : une base de E est fixée comme image de la base canonique de K^n.

Preuve. Soit $\mathcal{B}_C = (c_i)_{i \in \{1, \cdots, n\}}$ la base canonique de K^n. Rappelons que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, c_i est le vecteur colonne dont toutes les composantes sont nulles, excepté celui se trouvant à la i–ième position, qui vaut 1 ; autrement dit [1],

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, c_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, c_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il est immédiat que $(c_i)_{i \in \{1, \cdots, n\}}$ est une base de K^n.

Soit $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ une base de E, posons $\varphi(b_i) = c_i$, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, et pour $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ où les λ_i sont dans K, posons $\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$. Nous avons déjà vu que φ est une application linéaire. De plus, puisque l'image de B est libre dans K^n, φ est injective. En outre, l'image de B est $\mathcal{B}_C$ qui est génératrice de K^n, φ est donc surjective, c'est donc un isomorphisme de E vers K^n.

Réciproquement, si φ est un isomorphisme de E vers K^n, en posant $b_i = \varphi^{-1}(e_i)$, on obtient une famille libre $B = \{b_i, i \in \{1, \cdots, n\}\}$; de plus du fait que $\varphi^{-1}(K^n) = E$, cette famille est aussi génératrice, c'est donc une base de E. □

Si φ est une application linéaire d'un espace E vers un espace F, nous avons déjà vu que si E est de dimension finie, alors $\varphi(E)$ est aussi de dimension finie. Par ailleurs, Ker φ est un sous–espace vectoriel de E et est donc de dimension finie. Le résultat suivant lie la dimension de E à celles de Ker φ et de Im φ.

1. Dans la ligne suivante, nous avons supposé n suffisamment grand pour que le nombre de zéros représentés soit approprié.

Théorème 7. Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K. Si la dimension de E est finie, pour toute application linéaire φ de E dans F,

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\ \varphi + \dim \mathrm{Im}\ \varphi.$$

Preuve. Si Im $\varphi = \{0\}$, alors Ker $\varphi = E$; l'assertion est triviale. Supposons Im $\varphi \neq \{0\}$, *i.e.*, $\dim \mathrm{Im}\ \varphi \geqslant 1$. Puisque E est de dimension finie, Im $\varphi = \varphi(E)$ l'est aussi. Soit $W = \{w_1, \cdots, w_s\}$ une base de Im φ et $e_1, \cdots, e_s$ des éléments de E tels que $\varphi(e_i) = w_i$.

- Si Ker $\varphi = \{0\}$, posons $B_E = \{e_1, \cdots, e_s\}$. Puisque W est une base de Im φ, pour tout $v \in E$, il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in K$ tels que

  $$\varphi(v) = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_s w_s = \lambda_1 \varphi(e_1) + \cdots + \lambda_s \varphi(e_s).$$

  De la linéarité de φ, on obtient $\varphi(v - \lambda_1 e_1 - \cdots - \lambda_n e_n) = 0$; puisque Ker $\varphi = \{0\}$, on déduit $v - \lambda_1 e_1 - \cdots - \lambda_n e_n = 0$ ou encore $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Comme v est quelconque dans E, B_E est génératrice de E. De plus, pour tous $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in K$, si $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$, alors

  $$0 = \varphi(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \cdots + \lambda_n \varphi(e_n) = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_s w_s.$$

  Or la famille $\{w_1, \cdots, w_s\}$ est une base de Im φ, elle est donc libre ; on déduit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$. Toute combinaison linéaire nulle d'éléments de B_E est donc à coefficients tous nuls. La famille B_E est donc libre ; puisqu'elle est génératrice, elle est une base de E. L'égalité $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\ \varphi + \dim \mathrm{Im}\ \varphi$ est donc vérifiée.
- Si Ker $\varphi \neq \{0\}$, soit $\{u_1, \cdots, u_q\}$ une base de Ker φ. Considérons l'ensemble $B_E = \{e_1, \cdots, e_s, u_1, \cdots, u_q\}$. Pour montrer l'égalité $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\ \varphi + \dim \mathrm{Im}\ \varphi$, il suffit de montrer que B_E est une base de E.
  Puisque W est une base de Im φ, pour tout $v \in E$, il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in K$ tels que $\varphi(v) = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_s w_s = \lambda_1 \varphi(e_1) + \cdots + \lambda_s \varphi(e_s)$. De la linéarité de φ, on obtient

  $$\varphi(v - \lambda_1 e_1 - \cdots - \lambda_s e_s) = 0,$$

  autrement dit, $v - \lambda_1 e_1 - \cdots - \lambda_s e_s \in \mathrm{Ker}\ \varphi$. Il existe donc $\mu_1, \cdots, \mu_q \in K$ tels que

  $$v - \lambda_1 e_1 - \cdots - \lambda_s e_s = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_q u_q,$$

  ou encore

  $$v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_s e_s + \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_q u_q.$$

  Puisque v est quelconque dans E, on déduit que B_E est génératrice de E.
  Montrons à présent que B_E est libre. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_s, \mu_1, \cdots, \mu_q \in K$ tels que

  $$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_s e_s + \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_q u_q = 0. \tag{2.1}$$

On a alors

$$\varphi\left(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_s e_s + \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_q u_q\right) = \varphi(0) = 0.$$

De la linéarité de φ et du fait que les u_i sont dans Ker φ, on déduit

$$0 = \lambda_1 \varphi(e_1) + \cdots + \lambda_s \varphi(e_s) = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_s w_s.$$

Or la famille $(w_i)_{i\in\{1,\cdots,s\}}$ est une base de Im φ, elle est donc libre ; on déduit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$. Ainsi, la relation (2.1) devient

$$\mu_1 u_1 + \cdots + \mu_q u_q = 0.$$

Puisque la famille $(u_i)_{i\in\{1,\cdots,q\}}$ est une base de Ker φ, elle est libre. on déduit $\mu_1 = \cdots = \mu_q = 0$. Ainsi, la famille B_E est libre, elle constitue donc une base de E.

$\square$

Exemple 10. Le noyau de l'application φ donnée à l'exemple 8 est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = 0_{K^{n-1}}$; les vecteurs du noyau sont donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha \in K$. Ainsi Ker $\varphi = \mathrm{Vect}(c_n)$ où $c_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; donc $\dim \mathrm{Ker}\ \varphi = 1$ et $\dim \mathrm{Im}\ \varphi = n - 1$.

Exemple 11. Pour l'application φ donnée à l'exemple 9, si $a \in \mathrm{Ker}\ \varphi$, alors $\lambda a = 0$. Puisque $\lambda \in K \setminus \{0\}$, λ^{-1} existe, et donc $\lambda^{-1}(\lambda a) = a = 0$. Ainsi Ker $\varphi = \{0\}$; φ est donc injective. La relation $\dim \mathrm{Im}\ \varphi = \dim E$ permet de conclure que Im $\varphi = E$ d'où la surjectivité qui fait de φ un automorphisme de E.

Corollaire 3. Soients E et F deux K–espaces vectoriels de même dimension finie sur le même corps K et φ un morphisme de E vers F. Les assertions suivantes sont équivalentes.
(a) φ est injective ;
(b) Ker $\varphi = \{0\}$;
(c) φ est bijective ;
(d) φ est surjective.

Preuve. L'équivalence entre (a) et (b) a déjà été établie (voir Remarque 6). Montrons que (b) implique (c). Si Ker $\varphi = \{0\}$, alors $\dim \mathrm{Im}\ \varphi = \dim E = \dim F$. Puisque Im $\varphi \subset F$, on déduit Im $\varphi = F$, *i.e.* φ est surjective, donc bijective.

Par définition, (c) implique (d).

Si φ est surjective, Im $\varphi = F$, et donc $\dim \mathrm{Im}\ \varphi = \dim F = \dim E$. Ainsi, on a $\dim \mathrm{Ker}\ \varphi = 0$, ou encore Ker $\varphi = \{0\}$, ce qui démontre que (d) implique (b). $\square$

Exercice 2.1. Nous avons déjà vu au dernier item de l'exemple 1 du précédent chapitre, que si $E_1, \cdots, E_n$ sont des espaces vectoriels sur le même corps K, alors le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$ est un K–espace vectoriel. Montrer que si les espaces $E_1, \cdots, E_n$ sont de dimensions finies, alors

$$\dim E_1 \times \cdots \times E_n = \dim E_1 + \cdots + \dim E_n.$$

Corollaire 4. Soit E un K–espace vectoriel de dimension finie. Pour tous sous–espaces E_1, E_2 de E,

$$\dim E_1 + \dim E_2 = \dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2).$$

Preuve. De l'exercice ci–dessus, nous tirons que $\dim E_1 \times E_2 = \dim E_1 + \dim E_2$. Considérons l'application $\varphi : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1 + E_2$, qui à (e_1, e_2) associe $e_1 + e_2$. On vérifie sans grande difficulté que φ est un morphisme d'espaces vectoriels. De plus, si $(e_1, e_2) \in \operatorname{Ker} \varphi$, alors $e_1 + e_2 = 0$, ou encore $e_1 = -e_2$. Ainsi, $e_1 \in E_2$ et $(e_1, e_2) = (e_1, -e_1)$, avec $e_1 \in E_1 \cap E_2$. Réciproquement, pour tout $e \in E_1 \cap E_2$, $(e, -e) \in \operatorname{Ker} \varphi$. On conclut $\operatorname{Ker} \varphi = \{(e, -e), e \in E_1 \cap E_2\}$, d'où l'égalité

$$\dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim(E_1 \cap E_2).$$

Du théorème 7, on déduit

$$\dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2) = \dim E_1 \times E_2 = \dim E_1 + \dim E_2,$$

ce qui démontre le résultat. □

2.2.1 Rang d'une application linéaire

Nous avons déjà vu la notion de rang dans le cas d'une famille de vecteur ; dans le cas d'une application linéaire, on définit le rang comme le rang de l'image de l'espace de départ.

Définition 12. Soit E un K–espace vectoriel de dimension finie. Pour tout morphisme φ de E vers un K–espace vectoriel F, on définit le *rang* de φ par

$$\operatorname{rg} \varphi = \dim \operatorname{Im} \varphi.$$

Proposition 12. Soit E un K–espace vectoriel de dimension finie. Soit φ un morphisme de E vers un K–espace vectoriel F.
(a) L'application φ est injective si et seulement si

$$\operatorname{rg} \varphi = \dim E;$$

(b) φ est un isomorphisme si et seulement si

$$\operatorname{rg} \varphi = \dim E = \dim F.$$

Preuve.

(a) Si φ est injective, Ker $\varphi = \{0\}$, et donc $\dim \text{Ker } \varphi = 0$. Le théorème 7 permet de conclure.

(b) Si φ est un isomorphisme, de l'injectivité de φ, on déduit rg $\varphi = \dim \text{Im } \varphi = \dim E$. De la surjectivité, on déduit Im $\varphi = F$, et donc $\dim \text{Im } \varphi = \dim F$. d'où l'égalité rg $\varphi = \dim E = \dim F$.

□

2.3 Espace des morphismes

Si E et F sont des K–espaces vectoriels, on note $\mathcal{L}_K(E, F)$ ou $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des application linéaires de E dans F. L'espace des endomorphismes de E notera $\mathcal{L}(E)$ ou $\mathcal{L}_K(E)$. Dans cette section, nous montrons, entre autres, que $\mathcal{L}(E, F)$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel.

Proposition 13. Soient E et F deux K–espaces vectoriels, pour tous $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et pour tout $\lambda \in K$, les applications

$$\begin{array}{rccl} \varphi_1 + \varphi_2 : & E & \longrightarrow & F \\ & e & \longmapsto & \varphi_1(e) + \varphi_2(e) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \lambda\varphi_1 : & E & \longrightarrow & F \\ & e & \longmapsto & \lambda\varphi_1(e) \end{array}$$

sont linéaires.

Preuve. Pour tous $u, v \in E$ et tous $\alpha, \beta \in K$,

$$\begin{array}{rcl} (\varphi_1 + \varphi_2)(\alpha u + \beta v) & = & \varphi_1(\alpha u + \beta v) + \varphi_2(\alpha u + \beta v) \\ & = & \alpha\varphi_1(u) + \beta\varphi_1(v) + \alpha\varphi_2(u) + \beta\varphi_2(v) \\ & = & \alpha\left(\varphi_1(u) + \varphi_2(u)\right) + \beta\left(\varphi_1(v) + \varphi_2(v)\right) \\ & = & \alpha(\varphi_1 + \varphi_2)(u) + \beta(\varphi_1 + \varphi_2)(v), \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} (\lambda\varphi_1)(\alpha u + \beta v) & = & \lambda\left(\varphi_1(\alpha u + \beta v)\right) \\ & = & \lambda\left(\alpha\varphi_1(u) + \beta\varphi_1(v)\right) \\ & = & \alpha\lambda\varphi_1(u) + \beta\lambda\varphi_1(v)) \\ & = & \alpha(\lambda\varphi_1)(u) + \beta(\lambda\varphi_1)(v), \end{array}$$

ce qui démontre le résultat. □

Des propriétés ci–dessus, on déduit le résultat suivant dont la preuve est laissée en exercice.

Théorème 8. Si E et F sont des K–espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}_K(E, F)$ muni de l'addition et de la multiplication définies à la proposition 13 est un K–espace vectoriel.

2.3.1 Espace dual

Nous avons déjà vu qu'un corps K peut être vu comme un K–espace vectoriel. Étant donné un K–espace vectoriel E, nous nous intéressons ici à l'espace des formes linéaires sur E, $\mathcal{L}_K(E, K)$, dit espace dual de E, noté E^*. Supposons que la dimension de E soit finie, et soit $B_E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. D'après le théorème 5, pour toute famille de scalaires $(\alpha_i)_{i\in\{1,\cdots,n\}}$, il existe une et une seule forme linéaire $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(e_i) = \alpha_i, i \in \{1, \cdots, n\}$.

Posons $\mathbb{N}_n = \{1, \cdots, n\}$ et considérons l'application [2]

$$\begin{array}{rccl} \Lambda: & \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n & \longmapsto & K \\ & (i,j) & \longrightarrow & \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \tag{2.2}$$

Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on considère l'unique forme linéaire ψ_i définie par $\psi_i(e_j) = \delta_{i,j}$ (nous tenons l'existence et l'unicité de la forme linéaire ψ_i du théorème 5). Le résultat suivant montre que $(\psi_i)_{i\in\{1,\cdots,n\}}$ est une base de E^* ; on notera aussi que si E est de dimension finie, alors $\dim E = \dim E^*$.

Théorème 9. Soit E un K–espace vectoriel de dimension finie. Pour toute base $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ de E, la famille $B' = \left\{\psi_{i, i\in\{1,\cdots,n\}}\right\}$ où $\psi_i(e_j)_{e_j\in B} = \delta_{i,j}$ est une base de E^*.

Preuve. Il est clair que la famille B' est libre. En effet, pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in\{1,\cdots,n\}}$ de scalaires, si

$$\lambda_1\psi_1 + \cdots + \lambda_n\psi_n = 0_{E^*},$$

alors pour tout $e_j \in B'$

$$(\lambda_1\psi_1 + \cdots + \lambda_n\psi_n)(e_j) = 0_{E^*}(e_j) = 0_K.$$

Or

$$(\lambda_1\psi_1 + \cdots + \lambda_n\psi_n)(e_j) = \lambda_1\psi_1(e_i) + \cdots + \lambda_n\psi_n(e_i) = \lambda_j\psi_j(e_j) = \lambda_j \;;$$

et donc $\lambda_j = 0_K$. Ainsi, toute combinaison linéaire nulle d'éléments de B' est à coefficients nuls ; B' est libre.

Soit φ une forme linéaire sur E. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, posons $\gamma_i = \varphi(e_i)$, et soit

$$\varphi' = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\psi_i.$$

Du théorème 8, nous savons que φ' est une forme linéaire. De plus, pour tout $e_j \in B$,

$$\varphi'(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\psi_i(e_j) = \gamma_j\psi_j(e_j) = \gamma_j = \varphi(e_j).$$

Or, d'après le théorème 5, il existe une et une seule forme linéaire φ telle que $\varphi(e_j) = \gamma_j$,

2. On suppose $K \neq \{0\}$.

$j \in \{1, \cdots, n\}$. Ainsi,

$$\varphi' = \varphi = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \psi_i.$$

La famille B' est donc génératrice de E^* ; B' est donc une base de E^*.

□

2.4 Projections linéaires

Nous avons vu, à la section 1.1.3 que la somme de deux sous–espaces vectoriels E_1, E_2 d'un K–espace vectoriel E est dite directe si pour tout $v \in E_1 + E_2$, il existe un unique $v_1 \in E_1$ et un unique $v_2 \in E_1$ tels que $v = v_1 + v_2$. Supposons que la somme de E_1 et E_2 soit directe et que E_1 et E_2 soient supplémentaires dans E, *i.e.* $E_1 \oplus E_2 = E$. Ainsi, tout $v \in E$ s'écrit de façon unique $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in E_1$ et $v_2 \in E_2$. À cette décomposition on associe les applications π_1 et π_2, dites respectivement *projection linéaire sur E_1 parallèlement à E_2* et *projection linéaire sur E_2 parallèlement à E_1*, définies par $\pi_1(v) = v_1$ et $\pi_2(v) = v_2$; dit autrement, $v = \pi_1(v) + \pi_2(v)$.

La linéarité des applications π_1 et π_2 tient de la définition d'une somme directe de sous–espaces vectoriels. En effet, si $v = v_1 + v_2$ et $v' = v_1' + v_2'$, pour tous $\alpha, \beta \in K$, $\alpha v + \beta v' = \alpha(v_1 + v_2) + \beta(v_1' + v_2') = (\alpha v_1 + \beta v_1') + (\alpha v_2 + \beta v_2')$. Or $\alpha v_1 + \beta v_1' \in E_1$ et $\alpha v_2 + \beta v_2' \in E_2$, ainsi

$$\pi_1(\alpha v + \beta v') = \alpha v_1 + \beta v_1' = \alpha \pi_1(v) + \beta \pi_1(v')$$

et

$$\pi_2(\alpha v + \beta v') = \alpha v_2 + \beta v_2' = \alpha \pi_2(v) + \beta \pi_2(v').$$

Proposition 14. Soient E un K–espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sous–espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$.
(*a*) Pour tous $v \in E$, $i \in \{1, 2\}$, $v \in E_i \Leftrightarrow \pi_i(v) = v$;
(*b*) $\mathrm{Ker}\ \pi_1 = E_2$, $\mathrm{Im}\ \pi_1 = E_1$, $\mathrm{Ker}\ \pi_2 = E_1$, $\mathrm{Im}\ \pi_2 = E_2$;
(*c*) $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{Id}_E$;
(*d*) $\pi_1 \circ \pi_1 = \pi_1$, $\pi_2 \circ \pi_2 = \pi_2$;
(*e*) $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Preuve.
(*a*) Si $v \in E_1$, $v = v + 0$ et donc $\pi_1(v) = v$. Si $\pi_1(v) = v$ alors $v \in E_1$.
(*b*) Soit $v = v_1 + v_2$; $\pi_1(v) = 0$ si et seulement si $v_1 = 0$, ou encore $v \in E_2$. En outre, par définition $\mathrm{Im}\ \pi_1 \subset E_1$; inversement, si $v \in E_1$, $v = v + 0 = \pi(v)$ et donc $E_1 \subset \mathrm{Im}\ \pi_1$. Les mêmes arguments s'appliquent à π_2.
(*c*) Pour tout $v \in E$, v s'écrit $v_1 + v_2$ avec $v_i \in E_i$. Ainsi, $v = \pi_1(v) + \pi_2(v)$, ou encore $\mathrm{Id}_E = \pi_1 + \pi_2$.
(*d*) Pour tout $v \in E$, puisque $\pi_1(v) \in E_1$, $\pi_1(\pi_1(v)) = \pi_1(v)$, ou encore $\pi_1 \circ \pi_1 = \pi_1$; idem pour π_2.
(*e*) Découle de (*b*).

□

Définition 13. Soit E un espace vectoriel ; un endomorphisme π de E tel que $\pi\circ\pi = \pi$ est dit *projecteur*.

Théorème 10. Soit E un espace vectoriel. Si π est un projecteur de E, alors

(a) $\mathrm{Im}\ \pi = \mathrm{Ker}\ (\pi - \mathrm{Id}_E)$, autrement dit pour tout $v \in E$, $v \in \mathrm{Im}\ \pi$ si et seulement si $\pi(v) - v = 0$;

(b) $E = \mathrm{Im}\ \pi \oplus \mathrm{Ker}\ \pi$;

(c) π coïncide avec la projection linéaire sur $\mathrm{Im}\ \pi$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\ \pi$.

Preuve.

(a) Si $v \in \mathrm{Im}\ \pi$, il existe $w \in E$ tel que $v = \pi(w)$. Ainsi,

$$\pi(v) = \pi(\pi(w)) = \pi(w) = v$$

et donc $\pi(v) - v = 0$, ou encore $v \in \mathrm{Ker}\ (\pi - \mathrm{Id}_E)$. Réciproquement si $\pi(v) = v$, $v \in \mathrm{Im}\ \pi$.

(b) Commençons par montrer que $\mathrm{Im}\ \pi \cap \mathrm{Ker}\ \pi = \{0\}$. Soit $v \in \mathrm{Im}\ \pi \cap \mathrm{Ker}\ \pi$. Puisque $v \in \mathrm{Im}\ \pi$, $\pi(v) = v$ (d'après l'item *(a)*) ; et puisque $v \in \mathrm{Ker}\ \pi$, $\pi(v) = 0$, d'où l'égalité $v = 0$. Ainsi, $\mathrm{Im}\ \pi \cap \mathrm{Im}\ \pi = \{0\}$.
De la définition d'une projection, $\pi(\pi(v)) = \pi(v)$; de la linéarité de π, nous obtenons $\pi(v - \pi(v)) = 0$, ou encore $v - \pi(v) \in \mathrm{Ker}\ \pi$. Puisque tout $v \in E$ s'écrit $v = \pi(v) + (v - \pi(v)) \in \mathrm{Im}\ \pi + \mathrm{Ker}\ \pi$, on peut conclure $E = \mathrm{Im}\ \pi \oplus \mathrm{Ker}\ \pi$.

(c) De l'item *(b)*, nous avons que E est somme directe de $\mathrm{Im}\ \pi$ et de $\mathrm{Ker}\ \pi$. si $v = v_1 + v_2$ où $v_1 \in \mathrm{Im}\ \pi$ et $v_2 \in \mathrm{Ker}\ \pi$, il est clair que $\pi(v) = \pi(v_1 + v_2) = \pi(v_1) + \pi(v_2) = \pi(v_1)$.

□

Exercices

Exercice 2.2. Soit E un K–espace vectoriel de dimension finie. Un sous–espace vectoriel H de E est dit *hyperplan* si $\dim H = \dim E - 1$. Montrer que si H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts de E, alors

$$\dim H_1 \cap H_2 = \dim E - 2.$$

Exercice 2.3. Soit φ un endomorphisme d'un K–espace vectoriel E tel que pour tout $x \in E$, $\varphi(x)$ et x sont colinéaires. Montrer que φ est une homothétie.

Exercice 2.4. Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ deux applications linéaires telles que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in K$ tel que $\varphi_2(x) = \lambda_x \varphi_1(x)$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $\varphi_2 = \lambda \varphi_1$.

Exercice 2.5. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2) Que vaut $\varphi \circ \varphi$?
3) Donner le noyau et l'image de φ.

Exercice 2.6. Soit E, F, G trois espaces vectoriels, $\varphi_1 : E \longrightarrow F$ et $\varphi_2 : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires. Montrer que $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0_{\mathcal{L}(E,G)}$ si et seulement si $\mathrm{Im}\ \varphi_1 \subset \mathrm{Ker}\ \varphi_2$.

Exercice 2.7. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, E_1 et E_2 deux sous–espaces vectoriels de E.
1) Montrer que si E_1 et E_2 sont des hyperplans, alors ils possèdent un supplémentaire commun.
2) Montrer que si E_1 et E_2 sont de même dimension, alors ils possèdent un supplémentaire commun.

Exercice 2.8. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, φ un endomorphisme de E tel que $\mathrm{rg}\ (\varphi \circ \varphi) = \mathrm{rg}\ \varphi$. Montrer que :
a) $\mathrm{Im}\ (\varphi \circ \varphi) = \mathrm{Im}\ \varphi$ et $\mathrm{Ker}\ (\varphi \circ \varphi) = \mathrm{Ker}\ \varphi$;
b) $\mathrm{Im}\ \varphi \oplus \mathrm{Ker}\ \varphi = E$.

Exercice 2.9. Soient $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ n endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $\varphi_1 + \cdots + \varphi_n = \mathrm{Id}_E$ et pour $i \neq j$, $\varphi_i \circ \varphi_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
a) Montrer que les φ_i, $i \in \{1, \cdots, n\}$ sont des projecteurs.
b) Montrer que $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\ \varphi_i = E$.

Exercice 2.10. Soient E un K–espace vectoriel et $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes de E. Montrer que :

$$|\text{rg } \varphi_1 - \text{rg } \varphi_2| \leqslant \text{rg } (\varphi_1 + \varphi_2) \leqslant \text{rg } \varphi_1 + \text{rg } \varphi_2.$$