Exercices

Exercice 3. Soit E un K–espace vectoriel. Montrer les propriétés suivantes :
(a) $\forall x \in E$, $0_K x = 0_E$;
(b) $\forall \lambda \in K$, $\lambda 0_E = 0_E$;
(c) $\forall \lambda \in K, u \in E$, $\lambda u = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$ ou $u = 0$;
(d) $\forall \lambda \in K, u \in E$, $(-\lambda)u = \lambda(-u)$;
(e) $\forall \lambda, \mu \in K, u, v \in E$, $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$ et $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$.

Exercice 4. Soient E un K–espace vectoriel, F_1, F_2 deux sous–espaces vectoriels de E. Montrer que $F_1 \cup F_2$ est un sous–espace vectoriel de E si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

Exercice 5. On considère le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Dire si les familles suivantes sont liées, libres ou génératrices.
(a) $U_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ où $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$.
(b) $U_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ où $u_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} u_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Dans les cas suivants, dire s'il est possible d'écrire le vecteur u comme combinaison linéaire des v_i.
(a) $E = \mathbb{R}[x]$, $K = \mathbb{R}$, $u = 3 + x + 2x^2 + 21x^3$, $v_1 = 2 + x$, $v_1 = x + 2x^2$, $v_3 = x^2 + x^3$.
(b) $E = \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{C}$, $u = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$.
(c) $E = \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{R}$, $u = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Soit K un corps et $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}\}$ une famille de $n + 1$ scalaires deux à deux distincts. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n + 1\}$, on définit

$$p_i = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n+1,\ k \neq i} (x - \alpha_i).$$

Les p_i sont des éléments de $K_n[x]$, l'espace des polynômes de degré inférieur à n et à coefficients dans K. Montrer que la famille $(p_i)_{i \in \{1, \cdots, n+1\}}$ constitue une base de $K_n[x]$.

Exercice 8. Soient E un K–espace vectoriel et F_1, F_2 et H des sous–espaces vectoriels de E.
(a) Montrer que si $F_1 \subset H$ et $F_2 \subset H$ alors $F_1 + F_2 \subset H$.
(b) Montrer que $F_1 + F_2 = \mathrm{Vect}(F_1 \cup F_2)$.

Exercice 9. Soient E un K–espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous–espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus F_2$. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. Chaque vecteur u_i se décompose sous la forme $u_i = u_{i,1} + u_{i,2}$ avec $u_{i,1} \in F_1$ et $u_{i,2} \in F_2$. Montrer que si la famille $(u_{i,1})_{i \in I}$ est libre, alors il en est de même pour la famille $(u_i)_{i \in I}$.

Exercice 10. Soient $(E, +, \cdot)$ un K–espace vectoriel et G un ensemble tel qu'il existe une bijection φ de G vers E. Pour $u, v \in G$ et $\alpha \in K$, on définit $\alpha \otimes u = \varphi^{-1}(\alpha \cdot \varphi(u))$ et $u \oplus v = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$. Montrer que $(G, \oplus, \otimes)$ est un K–espace vectoriel.

Exercice 11. Soient E un K–espace vectoriel et $E_{i,i\in\{1,\cdots,p\}}$ une famille de sous–espaces de E. Pour $i, j \in \{1, \cdots, p\}$, il est déjà vu à la proposition 5 que la somme $E_i + E_j$ est directe si et seulement si $E_i \cap E_j = \{0\}$. Pour $p \geqslant 3$ sous espace vectoriels $E_{i,i\in\{1,\cdots,p\}}$, la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est dite directe si pour tout $k \in \{2, \cdots, p\}$, $(E_1 + \cdots + E_{k-1}) \cap E_k = \{0\}$.

(*1*) Montrer que si la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe, alors pour tout $i, j \in \{1, \cdots, p\}$, si $i \neq j$ alors $E_i \cap E_j = \{0\}$.

(*2*) On se propose de montrer que la réciproque est fausse. Soient $u, v \in E$ deux vecteurs de E linéairement indépendants. On pose $w = u + v$, $E_1 = \text{Vect}(u)$, $E_2 = \text{Vect}(v)$ et $E_3 = \text{Vect}(w)$.
- (*a*) Montrer que la somme $E_1 + E_2$ est directe.
- (*b*) Montrer que $E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = \{0\}$.
- (*c*) Montrer que la somme $E_1 + E_2 + E_3$ n'est pas directe.
- (*d*) L'assertion « pour tous $i, j \in \{1, \cdots, p\}$, si $i \neq j$ alors $E_i \cap E_j = \{0\}$ » suffit–elle pour affirmer que la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe ? Justifiez.

Exercice 12. Soit E un K–espace vectoriel de dimension finie et F un sous–espace vectoriel de E. Montrer qu'il existe un sous–espace vectoriel H tel que $F \oplus H = E$.

Indications de solutions

Solution (Exercice 1). Soit H l'intersection des sous–espaces vectoriels de E contenant S. De la proposition 2, nous tirons que H est un sous–espace vectoriel de E. Par ailleurs, H contient S (car H est une intersection d'ensembles contenant chacun S) ; donc $H \subseteq \text{Vect}(S)$. D'après la proposition 4, $\text{Vect}(S)$ est le plus petit un sous–espace vectoriel de E contenant S ; donc $H \supseteq \text{Vect}(S)$ d'où le résultat.

Solution (Exercice 3).
(*a*) $x = 1_K x = (1_K + 0_K)x = 1_K x + 0_K x = x + 0_K x$, ce qui implique $0_K x = x - x = 0_E$.
(*b*) Similaire à l'item ci–dessus.
(*c*) Si $\lambda \neq 0$ et $\lambda u = 0$, alors λ^{-1} existe et $\lambda^{-1}\lambda u = \lambda^{-1}0 = 0$, ce qui implique $u = 0$.
Les arguments sont du même genre pour les points suivants.

Solution (Exercice 4). Si $F_1 \subset F_2$, alors $F_1 \cup F_2 = F_2$ qui est un sous–espace vectoriel de E. Le même argument s'applique si $F_1 \supset F_2$.

Si $F_1 \not\subset F_2$ et $F_1 \not\supset F_2$, alors il existe u, v tels que $u \in F_1, u \notin F_2$ et $v \notin F_1, v \in F_2$. On a alors, $u + v \notin F_1$, car si $u + v \notin F_1$ alors $v = (u + v) - u \in F_1$, ce qui est en contradiction avec le choix de V. On montre de même que $u + v \notin F_2$. Ainsi, $u + v \notin F_1 \cup F_2$; $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous–espace vectoriel de E.

Solution (Exercice 5)**.**

(a) L'espace $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, la famille U_1 qui comporte 4 vecteurs est nécessairement liée. Considérons la sous–famille $\{u_1, u_2, u_3\}$. Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in R$, si $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$, on a $\begin{pmatrix} 3\alpha + 6\gamma \\ 3\alpha + 2\beta + 2\gamma \\ 3\alpha + 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ce qui donne $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est donc libre ; c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Puisque c'est une sous–famille de U_1, la famille U_1 est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

(b) Même démarche qu'à l'item ci–dessus.

Solution (Exercice 6)**.**

(a) S'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$, on a alors

$$3 + x + 2x^2 + 21x^3 = \alpha(2 + x) + \beta(x + 2x^2) + \gamma(x^2 + x^3).$$

Ce qui donne

$$3 + x + 2x^2 + 21x^3 = 2\alpha + (\alpha + \beta)x + (2\beta + \gamma)x^2 + \gamma x^3.$$

Par identification, on obtient $\alpha = \dfrac{3}{2}$, $\gamma = 21$; par ailleurs, on a $\beta = \dfrac{-1}{2}$ et $\beta = \dfrac{-19}{2}$ ce qui est impossible.

(b) $u = -(1 + 2i)v_1 + (1 - i)v_2$.

(c) Impossible (on remarquera que $K = \mathbb{R}$).

Solution (Exercice 7)**.** Il suffit d'observer que $p_j(\alpha_j) \neq 0$ et si $i \neq j$ alors $p_j(\alpha_i) = 0$. Ainsi, si $(\lambda_i)_{i\in\{1,\cdots,n+1\}}$ est une famille de scalaires telle que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k p_k = 0$, pour tout j, on a

$$-\lambda_j p_j = \sum_{k=1, k\neq j}^{n+1} \lambda_k p_k.$$

Ainsi

$$-\lambda_j p_j(\alpha_j) = \sum_{k=1, k\neq j}^{n+1} \lambda_k p_k(\alpha_j) = 0,$$

ce qui donne $\lambda_j = 0$. Toute combinaison linéaire nulle est à coefficients nuls. La famille est libre et son cardinal coïncide avec la dimension de $K_n[x]$; elle est une base de $K_n[x]$.

Solution (Exercice 9)**.** Supposons que la famille $(u_{i,1})_{i\in I}$ soit libre. Si

$$\sum_{i\in I} \alpha_i u_i$$

est une combinaison linéaire nulle d'éléments de la famille$(u_i)_{i\in I}$, on a

$$\sum_{i\in I} (\alpha_i u_{i,1} + \alpha_i u_{i,2}) = 0.$$

Ou encore

$$-\sum_{i\in I}\alpha_i u_{i,1}=\sum_{i\in I}\alpha_i u_{i,2}\in F_2;$$

puisque $F_1\cap F_2=\{0\}$, cela implique

$$\sum_{i\in I}\alpha_i u_{i,1}=0.$$

Comme la famille $(u_{i,1})_{i\in I}$ est libre, on déduit $\alpha_{i,i\in I}=0$.

Solution (Exercice 12)**.** Utiliser le théorème 1.