Présentation du Cours

Contenu du cours

Le contenu du cours sera divisé en cinq (5) chapitres, sur neuf (9) semaines, comme suit :

- Espaces vectoriels (1,5 semaines) ;
- Applications linéaires (1 semaine) ;
- Éléments de calcul matriciel (1,5 semaines) ;
- Formes multilinéaires alternées et déterminant (3 semaines) ;
- Équations linéaires (2 semaines).

Objectifs généraux

Ce cours s'adresse aux étudiants de la Licence de enseignement de mathématiques en ligne ; il correspond à l'UE ME123 du programme de cette licence. Il a pour but de fournir une introduction à l'algèbre linéaire.

De façon plus *spécifique*, l'objectif du cours est de permettre une maîtrise :

- de la théorie naïve des espaces vectoriels ;
- de la notion d'indépendance linéaire, de famille génératrice et des notions liées ;
- de la notion de rang ;
- des formes multilinéaires alternées ;
- du calcul matriciel et de la résolution des systèmes linéaires.

Déroulement du cours

Pour chaque chapitre, un document détaillé sera soumis aux étudiants. Ce document sera accompagné d'une feuille d'exercices, dont les corrections seront dévoilées au étudiants. Au besoin, des spots vidéos seront fournis sur certaines parties du cours. Des rencontres sur skype se feront également à la demande des étudiants ou sur convocation de l'enseignant responsable du cours ou du tuteur.

Références

- Serge Lang. Linear Algebra. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2004.
- Alfred Doneddu. Cours de mathématiques, tome 2. Vuibert, 1990.

Coordonnées de l'enseignant responsable du cours

Mail :	`aug.sarr@gmail.com`
Skype :	`augustin.sarr`
Postales :	Université Gaston Berger, UFR SAT, BP 234 Saint–Louis, Sénégal

Le mail constitue le moyen de communication préféré de l'auteur du cours. N'hésitez pas à le contacter à l'adresse indiquée, pour toute question concernant le cours.

Chapitre 1

Espaces vectoriels

Le plan plan euclidien $\mathbb{R}^2$ vous est déjà familier. Dans $\mathbb{R}^2$, on définit la somme de deux points X et Y de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ par $X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, pour tout réel λ, le produit λX est défini comme étant $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$. La notion d'espace vectoriel généralise les propriétés de $\mathbb{R}^2$ que vous connaissez déjà.

1.1 Espace vectoriel, sous–espace vectoriel

Définition 1 (Espace vectoriel)**.** Soit E un ensemble non–vide et K un corps commutatif. On suppose E muni de d'une loi de composition interne $+$, dite addition,

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow E \\ (u, v) &\longmapsto u + v \end{aligned}$$

et d'une loi de composition externe $\cdot$, dite multiplication externe,

$$\begin{aligned} K \times E &\longrightarrow E \\ (\alpha, u) &\longmapsto \alpha{\cdot}u. \end{aligned}$$

L'ensemble E est dit *espace vectoriel* sur K ou K–*espace vectoriel* si les propriétés ci–dessous sont vérifiées.
(a) $(E, +)$ est un groupe abélien.
(b) Pour tous $\alpha, \beta \in K$ et tous $u, v \in E$,
- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
- $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;
- $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$;
- $1_K u = u$, où 1_K est l'élément unité du corps K.

Les éléments de E sont dits *vecteurs* et ceux de K sont dits *scalaires.*

On remarquera que pour la multiplication, on note αu à la place de $\alpha{\cdot}u$, afin d'alléger l'écriture.

Exemple 1.
- Soit $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$, l'ensemble des paires $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ avec $x_{i,i=1,2} \in \mathbb{R}$. On munit E de l'addition et de la multiplication externe rappelées en introduction. On peut vérifier que $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe abélien et que la loi externe vérifie les propriétés listées à l'item (b) de la définition 1. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ espace–vectoriel.

– Soit $K = \mathbb{C}$ et E l'ensemble des suites numériques de la forme $U = (u_i)_{i\in\mathbb{N}} = \{u_0, u_1, u_2, u_3, \cdots\}$ dont les termes u_i sont dans $\mathbb{C}$. Pour deux éléments $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, \cdots\}$ et $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, \cdots\}$ de E, on définit la somme de U et V par
$$U + V = \{u_0 + v_0, u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v3, \cdots\}.$$
On montre sans difficulté que E muni de l'addition ainsi définie est un groupe abélien dont l'élément neutre est $O_E = \{0, 0, 0, \cdots\}$; l'opposé de $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, \cdots\}$ est $-U = \{-u_0, -u_1, -u_2, -u_3, \cdots\}$. Pour $\alpha \in K = \mathbb{C}$ et $U \in E$, on définit le produit de α et $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, \cdots\}$ par
$$\alpha U = \{\alpha u_0, \alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3, \cdots\}.$$
On vérifie que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et pour tous $U, V \in E$,
(a) $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$,
(b) $(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U$,
(c) $(\alpha\beta)U = \alpha(\beta U)$ et
(d) $1U = U$.
Ainsi, E muni de l'addition et de la multiplication externe ainsi définies est un $\mathbb{C}$–espace vectoriel.

– Soient $E_1, \cdots, E_n$ des espaces vectoriels sur le même corps K. On définit
$$E = \{v = (v_1, \cdots, v_n) : v_i \in E_i\}$$
et on muni E de la l'addition et de la multiplication externe suivantes. Pour $u = (u_1, \cdots, u_n) \in E$ et $v = (v_1, \cdots, v_n) \in E$,
$$u + v = (u_1 + v_1, \cdots, u_n + v_n)$$
et pour $\alpha \in K$,
$$\alpha u = (\alpha u_1, \cdots, \alpha u_n).$$
L'ensemble E muni de l'addition et de la multiplication ainsi définies est un K–espace vectoriel, dit *produit cartésien* des $E_{i,i\in\{1,\cdots,n\}}$.

1.1.1 Sous–espace vectoriel

Définition 2 (Sous–espace vectoriel)**.** Soit E un K–espace vectoriel et F une partie non–vide de E. F est dit sous–espace vectoriel de E si la restriction à F des lois $+$ et $\cdot$ lui confère une structure d'espace vectoriel. Autrement dit, F est un sous–espace vectoriel de E si

(a) $(F, +)$ est un groupe abélien, et
(b) La restriction à $K \times F$ de la loi de composition externe définie sur $K \times E$ est une application dans F, *i.e.*, $\forall \alpha \in K, \forall f \in F$, $\alpha f \in F$.

Exemple 2.

– Dans le $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0 \right\}$ est un sous–espace vectoriel.

– Dans le $\mathbb{C}$ espace vectoriel vu au second item de l'exemple 1, l'ensemble

$$P = \{U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, \cdots\} \in E : u_2 = 0\}$$

est un sous–espace vectoriel de E.

– Pour tout espace vectoriel E, $\{0\}$ et E sont des sous–espace vectoriels. Un sous–espace vectoriel distinct de ces derniers est dit *propre*.

Proposition 1. Soit E un K–espace vectoriel et F une partie non–vide de E. les assertions suivantes sont équivalentes.
(a) F est un sous–espace vectoriel de E.
(b) Pour tous $\alpha, \beta \in K$ et tous $x, y \in F$, $\alpha x + \beta y \in F$.
(c) Pour tous $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in K$ et pour tous $x_1, x_2, \cdots, x_n \in F$, $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in F$.

Preuve. De la définition d'un sous–espace vectoriel, il est clair que $(a)\Rightarrow(c)$ et $(c)\Rightarrow(b)$. Il suffit donc de montrer que $(b)\Rightarrow(a)$.

Pour $\alpha = 1$ et $\beta = -1$, on a pour tous $x, y \in F$, $x - y \in F$; ainsi $(F, +)$ est un sous–groupe de $(E, +)$.

Pour $\beta = 0$, on obtient, pour tous $\alpha \in K$ et $x \in F$, $\alpha x \in F$. Ainsi, la multiplication externe applique $K \times F$ dans F ; ce qui montre $(b)\Rightarrow(a)$, la proposition est ainsi démontrée. □

Si F_1 et F_2 sont des sous–espaces vectoriels d'un K–espace vectoriel E, en général $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous–espace vectoriel de E. Pour s'en convaincre, on peut considérer les $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et les sous–espaces (le lecteur vérifiera que F_1 et F_2 sont des sous–espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$)

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

On a $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in F_1 \cup F_2$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in F_1 \cup F_2$, toutefois $u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin F_1 \cup F_2$. $F_1 \cup F_2$ n'est donc pas un sous–espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Cependant l'intersection de sous–espaces vectoriels est toujours un sous–espace vectoriel comme le démontre la proposition suivante.

Proposition 2. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous espaces vectoriels d'un K–espace vectoriel E. Alors

$$F = \bigcap_{i \in I} F_i$$

est un sous–espace vectoriel de F.

Preuve. On a $0_E \in F_i$ pour tout $i \in I$; ainsi $0_E \in \bigcap_{i\in I} F_i = F \neq \varnothing$.

D'après la proposition 1, il suffit de montrer que pour tous $\alpha, \beta \in K$ et tous $x, y \in F$ $\alpha x + \beta y \in F$. Puisque $F \subset F_i$, pour tous $\alpha, \beta \in K$ et tous $x, y \in F \subset F_{i,i\in I}$, on a $\alpha x + \beta y \in F_{i,i\in I}$, car F_i est un sous–espace vectoriel. Ainsi, $\alpha x + \beta y \in \bigcap_{i\in I} F_i = F$. La proposition est démontrée. □

1.1.2 Combinaisons linéaires

Définition 3 (Combinaison linéaire)**.** Soit S une partie non–vide (non nécessairement finie) d'un K–espace vectoriel E ; S est dite *famille de vecteurs* de E. Un élément $x \in E$ est dit *combinaison linéaire* de vecteurs de S s'il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K$ et $s_1, \cdots, s_n \in S$ tels que

$$x = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_n s_n.$$

Les $\alpha_{i,i\in\{1,\cdots,n\}}$ sont dits *coefficients* de la combinaison linéaire.

Proposition 3. Soit E un K–espace vectoriel et $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ une famille finie de vecteurs de E. Toute combinaison linéaire de combinaisons linéaires de vecteurs V est une combinaison linéaire de vecteurs de V.

Preuve. Soient $x_1, \cdots, x_m$ des combinaisons linéaires de vecteurs de V, $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in K$ et $u = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$. Pour tout x_i, $i \in \{1, \cdots, m\}$, il existe $\beta_{i,1}, \cdots, \beta_{i,n} \in K$ tels que $x_i = \beta_{i,1} v_1 + \cdots + \beta_{i,n} v_n$. Ainsi,

$$u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{i,j} v_j \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_{i,j} v_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_{i,j} \right) v_j.$$

D'où le résultat. □

Proposition 4. Soit S une partie non–vide, non nécessairement finie, d'un K–espace vectoriel E. L'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de S est un sous–espace vectoriel de E, noté $\mathrm{Vect}(S)$. C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous–espace vectoriel de E contenant S ; il est dit *sous–espace vectoriel engendré* par S.

Preuve. Soit $\mathcal{C}_S$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de S. Puisque S est non–vide, $\mathcal{C}_S$ est aussi non–vide ; car pour $x \in S$, on a $x = 1{\cdot}x \in \mathcal{C}_S$ et donc $S \subset \mathcal{C}_S$.

De la proposition 1, il suffit de montrer que pour tous $\alpha, \beta \in K$ et tous $u, v \in \mathcal{C}_S$, $\alpha u + \beta v \in \mathcal{C}_S$.

Soient $u, v \in \mathcal{C}_S$. Il existe $r_1, \cdots, r_n, t_1, \cdots, t_m \in K$ et $u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_m \in S$ tels que

$$u = r_1 u_1 + r_2 u_2 + \cdots + r_n u_n$$

et

$$v = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_m v_m.$$

Ainsi, $\alpha u + \beta v$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\alpha u + \beta v &= \alpha(r_1u_1 + r_2u_2 + \cdots + r_nu_n) + \beta(t_1v_1 + t_2v_2 + \cdots + t_mv_m)\\ &= (\alpha r_1)u_1 + (\alpha r_2)u_2 + \cdots + (\alpha r_n)u_n + (\beta t_1)v_1 + (\beta t_2)v_2 + \cdots + (\beta t_m)v_m \in \mathcal{C}_S.\end{aligned}$$

Il est ainsi montré que $\mathcal{C}_S$ est un sous–espace vectoriel de E. De l'item (c) de la proposition 1, on obtient que tout sous–espace vectoriel de E contenant S contient aussi $\mathcal{C}_S$; $\mathcal{C}_S$ est donc le plus petit sous–espace vectoriel de E contenant S. $\square$

Remarque 1. Pour un ensemble $\{x_1, \cdots, x_n\}$ de vecteurs d'un espace vectoriel, on notera le sous–espace vectoriel engendré par $\{x_1, \cdots, x_n\}$ $\mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$ à la place de $\mathrm{Vect}(\{x_1, \cdots, x_n\})$ afin d'alléger l'écriture.

Exemple 3. Pour tout K–espace vectoriel E et tout $x \in E$, $\mathcal{C}_x = \{\alpha x, \alpha \in K\}$ est un sous–espace vectoriel de E. Un tel sous–espace est dit *droite vectorielle* engendrée par $\{x\}$

Exercice 1. Soit S une partie non–vide, non nécessairement finie, d'un K–espace vectoriel E. Montrer que $\mathrm{Vect}(S)$ est l'intersection des sous–espace vectoriels de E contenant S.

1.1.3 Somme de sous–espaces vectoriels

Nous avons déjà vu que l'union de sous–espaces vectoriels F_1 et F_2 d'un espace vectoriel E n'est pas nécessairement un sous–espace vectoriel. Cependant un sous–espace vectoriel qui contient $F_1 \cup F_2$ doit nécessairement contenir les vecteurs de la forme $v_1 + v_2$ avec $v_{i,i=1,2} \in F_i$.

Définition 4 (Somme de sous–espaces vectoriels)**.** Soient E un K–espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous–espaces vectoriels de E. On définit la *somme* de F_1 et F_2 par

$$F_1 + F_2 = \{v_1 + v_2,\ v_{i,i=1,2} \in F_i\}.$$

La somme est dite *directe* si pour tous $v_1, v_1' \in F_1$ et tous $v_2, v_2' \in F_2$, si $v_1+v_2 = v_1'+v_2'$ alors $v_1 = v_1'$ et $v_2 = v_2'$. Dans ce cas, on note $F_1 \oplus F_2$ à la place de $F_1 + F_2$.

Proposition 5. Soient E un K–espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous–espaces vectoriels de E.
(a) $F_1 + F_1$ est un sous–espace vectoriel de E.
(b) La somme $F_1 + F_1$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_1 = \{0\}$.

Preuve.
(a) Montrons que $F_1 + F_1$ est un sous–espace vectoriel de E. On a $F_1 + F_1 \neq \varnothing$ car $0 = 0 + 0 \in F_1 + F_2$. De plus, pour tous $u = v_1 + v_2, u' = v_1' + v_2' \in F_1 + F_2$, et pour tous $\alpha, \beta \in K$, on a

$$\alpha u + \beta u = \alpha(v_1 + v_2) + \beta(v_1' + v_2') = (\alpha v_1 + \beta v_1') + (\alpha v_2 + \beta v_2') \in F_1 + F_2.$$

Ce qui montre, d'après la proposition 1, que $F_1 + F_2$ est un sous–espace vectoriel de E.

(b) Supposons la somme $F_1 + F_2$ directe et montrons que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Soit $v \in F_1 \cap F_2 \subset F_1$. Puisque $F_1 \cap F_2$ est un sous–espace vectoriel de E, $-v \in F_1 \cap F_2 \subset F_2$; ainsi, on a $0 = v + (-v) = 0 + 0$. Puisque $v \in F_1$ et $-v \in F_2$ et la somme est directe, on a $v = -v = 0$; comme v est quelconque dans $F_1 \cap F_2$, on a nécessairement $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.
Réciproquement, supposons $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et montrons que la somme $F_1 + F_2$ est directe. Soient $v_1, v_1' \in F_1$ et $v_2, v_2' \in F_2$ tels que $v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$. On a alors $v_1 - v_1' = v_2' - v_2$. Or $v_1 - v_1' \in F_1$ et $v_2' - v_2 \in F_2$; ainsi $v_1 - v_1' \in F_1 \cap F_2 = \{0\}$, ou encore $v_1 = v_1'$. De même, $v_2 = v_2'$, d'où le résultat.

□

Exemple 4.
- Dans le $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, la somme de $F_1 = \mathrm{Vect}(v_1)$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(v_2)$ où $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, est directe.
- On peut vérifier que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, dont $\mathbb{R}$ est un sous–espace vectoriel. On notera aussi que $i\mathbb{R} = \{ix, x \in \mathbb{R}\}$ est un sous–espace vectoriel du $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathbb{C}$. Le lecteur vérifiera que $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$.

1.2 Famille libre, famille génératrice

Définition 5 (famille libre finie)**.** Soit E un K–espace vectoriel et $P = \{x_1, \cdots, x_n\}$ une famille finie de vecteurs de E.
- La famille P est dite *liée* s'il existe $\alpha_1, \cdots \alpha_n \in K$ non tous nuls tels que
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0.$$
- La famille P est dite *libre* si elle n'est pas liée *i.e.* si pour tous $\alpha_1, \cdots \alpha_n \in K$, si $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ alors $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Proposition 6. Soient E un K–espace vectoriel et $V = \{v_1, \cdots, v_p\}$ une famille de p vecteurs de E. Soit $F = \mathrm{Vect}(V)$, le sous–espace vectoriel engendré par V. Toute famille d'au moins $p + 1$ vecteurs de F est liée.

Preuve. Il suffit de montrer que toute famille de $p+1$ vecteurs de F est liée. Raisonnons par récurrence sur p.

Pour $p = 1$, on a $F = \mathrm{Vect}(v_1)$; si $U = \{u_1, u_2\}$ est une famille de deux vecteurs de F, alors il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ tels que $u_1 = \alpha_1 v_1$ et $u_2 = \alpha_2 v_1$. Ainsi,
$$\alpha_2 u_1 - \alpha_1 u_2 = (\alpha_2 \alpha_1) v_1 - (\alpha_1 \alpha_2) v_1 = 0.$$
Si $\alpha_1 \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, alors $\alpha_2 \alpha_1 \neq 0$ et la U famille est liée.

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, alors $u_1 = u_2 = 0$ et la famille U est liée. Si $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, alors $u_1 = 0$ et $u_2 \neq 0$; ainsi $1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 = 0$ et U est liée. On montre de même que si

Si $\alpha_2 = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$, alors U est liée.

Supposons le résultat vrai pour $p-1$, montrons qu'il l'est alors pour p. Rappelons que $V = \{v_1, \cdots, v_p\}$. Soient $F' = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_{p-1})$, $F = \mathrm{Vect}(V)$ et $U = \{u_1, \cdots, u_{p+1}\}$ une famille de $p+1$ vecteurs de F. Montrons que la famille U est liée.

Puisque tout élément $u \in F$ s'écrit sous la forme

$$u = z + \alpha v_p \text{ où } z \in F',$$

pour tout $j \in \{1, \cdots, p+1\}$, u_j s'écrit sous la forme

$$u_j = z_j + \alpha_j v_p \text{ où } z_j \in F' \text{ et } \alpha_j \in K.$$

Si les α_j, $j \in \{1, \cdots, p\}$ sont tous nuls, alors pour tout $j \in \{1, \cdots, p\}$, $u_j \in F'$ et l'hypothèse de récurrence permet de conclure que la famille U est liée.

Sinon, au moins un des α_j est non nul. On peut supposer, quitte à changer la numérotation, que α_{p+1} est non nul. Ainsi, α_{p+1}^{-1} existe et de la relation

$$u_{p+1} = z_{p+1} + \alpha_{p+1} v_p,$$

on déduit

$$v_p = \alpha_{p+1}^{-1} \left(u_{p+1} - z_{p+1}\right).$$

Les relations

$$u_j = z_j + \alpha_j v_p, \;\; j \in \{1, \cdots, p\}$$

deviennent alors

$$u_j = z_j + \alpha_j \alpha_{p+1}^{-1} \left(u_{p+1} - z_{p+1}\right),$$

ou encore

$$u_j - \alpha_j \alpha_{p+1}^{-1} u_{p+1} = z_j - \alpha_j \alpha_{p+1}^{-1} z_{p+1}.$$

Puisque $z_{j, j \in \{1, \cdots, p+1\}} \in F'$, on a

$$u_j - \alpha_j \alpha_{p+1}^{-1} u_{p+1} = z_j - \alpha_j \alpha_{p+1}^{-1} z_{p+1} \in F'.$$

De l'hypothèse de récurrence, la famille des vecteurs $w_{j, j \in \{1, \cdots, p\}} = u_j - \alpha_j \alpha_{p+1}^{-1} u_{p+1} \in F'$ est liée. Il existe donc $\beta_1, \cdots, \beta_p \in K$ non tous nuls tels que

$$\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_p w_p = 0$$

ou encore

$$\beta_1 \left(u_1 - \alpha_1 \alpha_{p+1}^{-1} u_{p+1}\right) + \cdots + \beta_p \left(u_p - \alpha_p \alpha_{p+1}^{-1} u_{p+1}\right) = 0.$$

En posant $\beta_{p+1} = -\alpha_{p+1}^{-1} \left(\alpha_1 \beta_1 + \cdots + \alpha_p \beta_p\right)$, on obtient

$$\beta_1 u_1 + \cdots \beta_{p+1} u_{p+1} = 0;$$

les $\beta_{j,j\in\{1,\cdots,p+1\}}$ étant non tous nuls, la famille $U = \{u_1, \cdots, u_{p+1}\}$ est liée ; la proposition est ainsi démontrée. $\square$

Exemple 5. Soit E un K–espace vectoriel. Si v_1 et v_2 sont deux vecteurs de E, alors pour tout $\alpha, \beta \in K$, la famille de vecteurs $U = \{v_1, v_1, \alpha v_1 + \beta v_2\}$ est liée. En effet, $\alpha v_1 + \beta v_2 \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, elle est donc liée d'après la proposition ci–dessus.

Exercice 2. Pour la famille U de l'exemple 5, exhibez suivant les valeurs de α et β une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls.

Corollaire 1. Soit E un K–espace vectoriel et $V = \{v_1, \cdots, v_p\}$ une famille de vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.
(a) La famille V est liée.
(b) Il existe $j \in \{1, \cdots, p\}$ tel que $x_j \in \mathrm{Vect}\,(V \setminus \{x_j\})$.

Preuve. Montrons que (a) implique (b). Supposons la famille V liée. Il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_p \in K$ non tous nuls tels que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = 0.$$

Puisque les $\alpha_{j,j\in\{1,\cdots,p\}}$ sont non tous nuls, il existe $j_0 \in \{1, \cdots, p\}$ tel que $\alpha_{j_0} \neq 0$. On peut supposer, quitte à changer la numérotation, que $j_0 = p$. On a alors

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{p-1} v_{p-1} = -\alpha_p v_p$$

ou encore

$$v_p = -\alpha_p^{-1} \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p^{-1} \alpha_{p-1} v_{p-1};$$

autrement dit, $v_p \in \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_{p-1})$.

Réciproquement, s'il existe $j \in \{1, \cdots, p\}$ tel que $x_j \in \mathrm{Vect}\,(V \setminus \{x_j\})$, alors V est une famille de p vecteurs et la proposition 6 permet de conclure. $\square$

Remarque 2. Si E est un K–espace vectoriel et $V = \{v_1, \cdots, v_p\}$ une famille de vecteurs de E, en considérant les négations des assertions du corollaire 1, on obtient les assertions équivalentes ci–dessous.
(a) La famille V est libre.
(b) Pour tout $j \in \{1, \cdots, p\}$, $x_j \notin \mathrm{Vect}\,(V \setminus \{x_j\})$.

Proposition 7. Soit E un K–espace vectoriel et $V = \{v_1, \cdots, v_p\}$ une famille de vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.
(a) La famille V est libre.
(b) Pour tout $u \in \mathrm{Vect}(V)$, il existe un unique p–uplet de scalaires $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ tel que $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p$.

Preuve. Supposons (a) et montrons (b). Soient $u \in \mathrm{Vect}(V)$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_p, \alpha'_1, \cdots, \alpha'_p \in K$ tels que

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = \alpha'_1 v_1 + \cdots + \alpha'_p v_p.$$

On a alors

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \cdots + (\alpha_p - \beta_p) v_p.$$

Puisque la famille V est libre, on déduit $0 = \alpha_1 - \beta_1 = \cdots = \alpha_p - \beta_p$; ou encore

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \cdots\ , \alpha_p = \beta_p,$$

ce qui démontre (b).

Réciproquement, supposons que pour tout $u \in \mathrm{Vect}(V)$, il existe un unique p–uplet de scalaires $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ tel que $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p$ et montrons que V est libre. Si V est liée, il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_p \in K$ non tous nuls tels que $0 = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p$. Puisque $0 = 0{\cdot}v_1 + \cdots + 0{\cdot}v_p$, on a nécessairement $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$, ce qui contredit le fait que les α_i soient non tous nuls. La famille V ne peut donc être liée, elle est libre. □

Définition 6 (famille libre infinie)**.** Soient E un K–espace vectoriel et H une partie *infinie* de E.
- La famille de vecteurs H est dite *libre*, si toute sous–famille finie de vecteurs de H est libre.
- La famille H est dite *liée* si on peut extraire de celle-ci une sous–famille finie liée.

1.2.1 Base, dimension

Définition 7 (Espace de dimension finie, base)**.** Soit E un K–espace vectoriel.
- Une famille $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de vecteurs de E est dite *génératrice* de E si $\mathrm{Vect}(V) = E$.
- L'espace E est dit de *dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie.
- On dira que E est de *dimension infinie* s'il admet une famille libre infinie.
- Une famille B, non nécessairement finie, de vecteurs de E est dite *base de E* si (i) elle est *libre* et (ii) *génératrice.*

Exemple 6.
- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est un base du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
- Considérons $\mathbb{R}[x]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels. $\mathbb{R}[x]$ est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel (on peut vérifier que les propriétés de la définition 1 sont satisfaites). Soit $B = \{1, x, x^2, x^3, \cdots\}$; on notera que la famille B est infinie. En outre, B est génératrice de $\mathbb{R}[x]$. En effet, pour tout $p \in \mathbb{R}[x]$, p s'écrit sous une des formes suivantes
$$p = 0{\cdot}1 = 0$$
ou
$$p = \alpha_0{\cdot}1 + \alpha_1{\cdot}x + \cdots + \alpha_n{\cdot}x^n \text{ avec } a_n \neq 0;$$
p est donc une combinaison linéaire d'éléments de B. De plus, tout combinaison linéaire nulle d'éléments de B est à coefficients tous nuls. En effet, pour tous $i_1, \cdots, i_n \in \mathbb{N}$ et tous $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_n} \in \mathbb{R}$, si pour $k \neq j$, $i_j \neq i_k$ et si $\alpha_{i_1} x^{i_1} + \alpha_{i_2} x^{i_2} + \cdots + \alpha_{i_n} x^{i_n} = 0$, alors $\alpha_{i_1} = \cdots = \alpha_{i_n} = 0$. La famille B est donc une base de $\mathbb{R}[x]$.

Théorème 1. Soit E un K–espace vectoriel de dimension finie et L une famille libre de vecteurs E. Si E est de dimension finie, alors il existe une base de E qui contient L.

Preuve. Puisque E est dimension finie, il admet une famille génératrice finie. Soient G une famille génératrice finie et L une famille libre de E. Notons $\mathrm{Card}(G)$ le cardinal de G. Puisque G est finie et génératrice de E, d'après la proposition 6, toute famille d'au moins $\mathrm{Card}(G)+1$ vecteurs de E est liée. Ainsi, puisque L est libre, on a nécessairement $\mathrm{Card}(L) \leqslant \mathrm{Card}(G)$; la famille L est donc finie.
Posons $U = L \cup G$ et soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des parties libres et contenant L de U, *i.e.*

$$\mathcal{L} = \{P : L \subset P \subset U \text{ et } P \text{ est libre } \}\,.$$

L'ensemble $\mathcal{L}$ est non–vide car $L \in \mathcal{L}$. De plus, puisque U est fini $\mathcal{P}(U)$, l'ensemble des parties de U, est aussi fini ; et comme $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(U)$, $\mathcal{L}$ est aussi fini.
L'ensemble des cardinaux d'éléments de $\mathcal{L}$ est une partie finie non–vide de $\mathbb{N}$. Cet ensemble admet donc un plus grand élément, notons celui–ci n. Soit B un élément de $\mathcal{L}$ de cardinal n.

- Si $\mathrm{Card}(U) = n$, *i.e.* si $\mathrm{Card}(U) = \mathrm{Card}(B)$, alors $B = U$ (car le seul sous–ensemble de U de cardinal $\mathrm{Card}(U)$ est U) et B est libre et génératrice, c'est donc une base de E.
- Sinon, posons $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$. De la définition de B, pour tout $x \in U \setminus B$, la famille $B \cup \{x\}$ est liée. Il existe donc $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1} \in K$, non tous nuls, tels que $\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n + \alpha_{n+1} x = 0$. On a nécessairement $\alpha_{n+1} \neq 0$, car la famille B serait liée sinon. Ainsi, $x = \alpha_{n+1}^{-1}\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_{n+1}^{-1}\alpha_n b_n$ est donc une combinaison linéaire d'éléments de B. Tout vecteur de U est donc une combinaison linéaire d'éléments de B. De la proposition 3, on déduit que tout vecteur de E est une combinaison linéaire d'éléments de B. La famille B est donc libre et génératrice ; c'est une base de E.

□

Remarque 3. Dans un espace vectoriel de dimension finie, si L est une famille libre et G une famille génératrice, il est toujours possible de compléter L par des éléments de G, de façon à obtenir une base.

Théorème 2. Soit E un K–espace vectoriel de dimension finie et B_1 une base de E.
(a) Si L est une famille libre de E alors $\mathrm{Card}(L) \leqslant \mathrm{Card}(B_1)$.
(b) Si B_2 est une base de E, alors $\mathrm{Card}(B_1) = \mathrm{Card}(B_2)$.

Preuve.
(a) Puisque B_1 est génératrice de E, de la proposition 6, toute famille de vecteurs de cardinal supérieur ou égal à $\mathrm{Card}(B) + 1$ est liée. Si L est une famille libre, on a donc nécessairement $\mathrm{Card}(L) \leqslant \mathrm{Card}(B)$.
(b) Puisque B_2 est libre et B_1 est génératrice, de l'item (a), on a $\mathrm{Card}(B_2) \leqslant \mathrm{Card}(B_1)$; de même $\mathrm{Card}(B_1) \leqslant \mathrm{Card}(B_2)$ d'où l'égalité $\mathrm{Card}(B_1) = \mathrm{Card}(B_2)$.

□

Définition 8. Soit E un K–espace vectoriel de dimension finie. Le cardinal d'une base de E est dit *dimension* de E, notée $\dim E$.

Remarque 4.
- Si E est un K–espace vectoriel de dimension finie et B une base de E, alors pour tout sous–espace vectoriel F de E et toute famille libre L_F de vecteurs de F, on a $\mathrm{Card}(L_F) \leqslant \mathrm{Card}(B)$. En effet, si L_F est une famille libre de vecteurs de F, L_F est aussi une famille libre de vecteurs de E, et donc l'assertion découle de l'item (a) du théorème 2. Naturellement, si B_F est une base de F alors $\dim F = \mathrm{Card}(B_F) \leqslant \mathrm{Card}(B) = \dim E$.
- De l'item (b), on a que toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même cardinal.

Théorème 3. Soit E un K–espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. Si E est de dimension finie, de toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base.

Preuve. Soit $V = \{v_1, \cdots, v_p\}$ une famille génératrice de E. Procédons par récurrence sur p.
- Si $p = 1$, alors $V = \{v_1\}$. Puisque $E \neq \{0\}$, on a nécessairement $v_1 \neq 0$, la famille V est libre ; c'est donc une base de E.
- Supposons le résultat vrai pour tout espace vectoriel engendré par par une famille de $p-1$ vecteur et montrons qu'il est pour tout espace engendré par une famille de p vecteurs. Soit $V = \{v_1, \cdots, v_p\}$ une famille génératrice de E.
  - Si V est libre, alors V est une base de E.
  - Sinon, la famille V est liée. D'après le corollaire 1, il existe $j \in \{1, \cdots, p\}$ tel que $x_j \in \mathrm{Vect}(V \setminus \{x_j\})$. De la proposition 3, on a
  $$\mathrm{Vect}(V \setminus \{x_j\}) = \mathrm{Vect}(V) = E.$$
  Ainsi, la famille $V \setminus \{x_j\}$, de cardinal $p-1$, est génératrice. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut extraire de cette famille une base de E.

La résultat est ainsi démontré. □

Rang d'une famille de vecteurs

Définition 9. Soit $V = \{v_1, \cdots, v_p\}$ une famille de vecteurs d'un K–espace vectoriel E. On appelle rang de V, noté $\mathrm{rg}(V)$ la dimension du sous–espace vectoriel $\mathrm{Vect}(V)$. Du théorème 3, on a toujours $\mathrm{rg}(V) = \dim \mathrm{Vect}(V) \leqslant p$.

Exemple 7. Dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, posons
$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V = \{v_1, v_2, v_3\}.$$

La famille V est de rang 2. En effet, on a $v_1 = 3v_2 + \frac{7}{2}v_3$; ainsi $\mathrm{Vect}(V) = \mathrm{Vect}(\{v_2, v_3\})$. Or la famille $\{v_2, v_3\}$ est libre. En effet, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha v_2 + \beta v_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$ équivaut à

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui implique $\alpha = \beta = 0$. La famille $\{v_2, v_3\}$ est donc une base de $\mathrm{Vect}(V)$, d'où $\mathrm{rg}(V) = 2$.