Responsable du cours: Pr Mamadou Sy

1. SERIES NUMERIQUES

Exercice 1.1. Montrer que la série harmonique alternée

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

est convergente et calculer sa somme.

Exercice 1.2. Soit $\sum u_n$ une série dont le terme général s'écrit $u_n = x_{n+1} - x_n, n \in \mathbb{N}$, pour une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée.

a) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente; et montrer ainsi que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} x_n - x_0.$$

b) Montrer que les séries de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)},\ \ n \geq 0 \quad \text{et} \quad v_n = \arctan\frac{1}{n^2+n+1},\ \ n \geq 0,$$

sont convergentes et calculer leurs sommes.

ind: $\arctan\frac{a-b}{1+ab} = \arctan(a) - \arctan(b)$.

Exercice 1.3. a) Montrer que l'ensemble des séries numériques convergentes est un sous espace vectoriel de l'espace des séries numériques.

b) Qu'en est il de l'ensemble des séries divergentes ?

c) Montrer que la série de terme geńéral

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln\, n$$

est convergente. Sa somme, notée γ, est appelée la Constante d'Euler.

Exercice 1.4. a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent. Montrer que $\sum u_n v_n$ converge.

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\sum \frac{1}{1+n^2u_n}$ converge. Montrer que $\sum u_n$ diverge.

Exercice 1.5. Etudier la nature des séries de terme général u_n avec u_n donnée par :

$$a)\ u_n = \frac{1}{n!}, \qquad b)\ u_n = \frac{n^n}{n!}, \qquad c) u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad d)\ u_n = \frac{1}{(ln\, n)^{ln\, n}}$$

$e)\ u_n = 2^{-\sqrt{n}}$, $\qquad f)\ u_n = f(a+\frac{1}{n}) + f(a-\frac{1}{n}) - 2f(a)$ (f de classe C^2 au voisinage de a)

Exercice 1.6. Déterminer les réels a, b, c tels que les séries de terme général

$$u_n = \frac{2^n + a^n}{2^n + b^n},\ (a > 0 \text{ et } b > 0) \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{an+b} - \frac{c}{n}$$

soient convergentes.

2. SERIES DE FONCTIONS

Exercice 2.1. Etudier la convergence simple, uniforme et normale, des séries de fonctions u_n définies sur $[0, 1]$ dont le terme général est donné ci-dessous:

$$a)\ u_n(x) = \frac{1}{n + xn^2}, \qquad b)\ u_n(x) = \frac{(-1)^n \arctan(nx)}{1+nx}, \qquad c)\ u_n(x) = \frac{(-1)^n)}{nx + \sqrt{n}}$$

$$d)\ u_n(x) = x^n(1-x) \qquad e)\ u_n(x) = (-1)^n x^n (1-x) \qquad f)\ u_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n^2}.$$

Exercice 2.2. On pose $f_n(x) = x^a e^{-nx}$ où $a > 0, n \geq 0$ et $x \geq 0$.

a) Calculer la somme de la série de terme général f_n.

b) Montrer que l'on a la convergence normale si $a > 1$.

c) Montrer que l'on a pas la convergence uniforme si $a \leq 1$.

Montrer que l'on a convergence uniforme sur tout intervalle $[s, +\infty[$, où $s > 0$.

Exercice 2.3. Montrer que la série de terme général

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{\sin(x+n)}{x+n} \quad x \geq 0$$

converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2.4. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$u_n(x) = -2n^2 x e^{-n^2 x^2}.$$

a) Montrer que la série de terme général $v_n(x) = u_n(x) - u_{n+1}(x)$ converge et calculer la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x).$$

b) Soit $a > 0$. Montrer que la série de terme général

$$w_n = \int_0^a v_n(t)dt$$

converge et calculer sa somme.

c) Calculer

$$\int_0^a S(t)dt.$$

d) En déduire que la série de terme général $u_n - u_{n+1}$ ne converge pas uniformément sur $[0, a]$.

Exercice 2.5. Soit a un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par u_n la fonction définie pour $x \in [0, +\infty[$ par

$$u_n(x) = nx^a e^{-nx^2}.$$

1) Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} lnu_(x), \quad \text{pour } x > 0.$$

2) En déduire que pour tout $a > 0$, la série de fonction de terme général $u_n(x)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

3) a) Pour $|z| < 1$, calculer $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$.

b) En faisant un changement de variable, en déduire la somme

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

3. INTEGRALES GENERALISEES

Exercice 3.1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$. Déterminer l'ensemble des couples (α, β) pour lesquels l'intégrales généralisée

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha lnt}{1 + t^\beta} dt$$

est convergente.

Exercice 3.2. Convergence et calcul de

$$\int_0^1 \frac{ln(1 + t^2)}{t^2} dt, \qquad \int_0^\infty ln(1 + \frac{1}{t^2}) dt, \qquad \int_1^\infty \frac{lnt}{t^n} dt.$$