UNIVERSITÉ GASTON BERGER DE SAINT-LOUIS
U.F.R de Sciences Appliquées et de Technologie
LABORATOIRE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET D'INFORMATIQUE
(LANI)

Cours d'Analyse III, Licence Math en Ligne
Séries numériques

Auteur : Mamadou SY
LANI et Section Mathématiques Appliquées, UFR SAT.

Chapitre 1

Séries numériques

1.1. Définitions

Définition 1.1. *On appelle série numérique de terme général* u_n *le couple noté* $\sum u_n$ *et égale à* $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *avec* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suite numérique et* $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

S_n est appelée la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$.

On considère $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries numériques et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Avec $\sum u_n = ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ et $\sum v_n = ((v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S'_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Définition 1.2. *On définit*

i) $\sum w_n = \sum u_n + \sum v_n$ *avec* $w_n = u_n + v_n$, $\sum w_n = ((w_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S''_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *où* $S''_n = S_n + S'_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k + v_k)$.

ii) $\sum t_n = \lambda \sum u_n$ *avec* $t_n = \lambda u_n$, $\sum t_n = ((t_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S'''_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *où* $S'''_n = \lambda S_n = \sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k)$.

L'ensemble des séries numériques muni de l'addition (+) et de la multiplication par un réel (.) est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

1.2. Convergence des séries numériques

1.2.1. Séries convergentes

Définition 1.3. $\sum u_n$ *est dite convergente si la suite* (S_n) *de ses sommes partielles d'ordre* n *est convergente dans* $\mathbb{R}$ *et dans ce cas* $\lim S_n$ *est appelée la somme de la série* $\sum u_n$ *et on pose* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

Proposition 1.4. *Si* $\sum u_n$ *est convergente alors* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration $\sum u_n$ converge signifie que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $S \in \mathbb{R}$. Aussi $(S_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers S. Donc $(S_n - S_{n-1})$ converge vers 0.

Or $\displaystyle S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$. D'où le résultat. □

Remarque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ n'entraîne pas que $\sum u_n$ converge!

Contre-exemple : On considère la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Cependant la suite $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ne converge pas. Il est facile de montrer qu'elle n'est pas de Cauchy en évaluant par exemple $S_{2n} - S_n$.

Exemple : Série géométrique. $\sum u_n$ où $u_n = u_0 q^n$ avec $q \in \mathbb{R}$ la raison. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_0 q^k) = u_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

q^{n+1} pour $q \neq 1$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$.

Donc pour $q \neq 1$, $\sum u_n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{u_0}{1-q}$.

Si $q = 1$ on a $u_n = u_0$ et $S_n = (n+1)u_0$. Si $u_0 = 0$ alors $S_n = 0$. Si $u_0 \neq 0$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Donc u_n ne converge pas.

Finalement : Pour $u_0 \neq 0$, $\sum u_0 q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Proposition 1.5. *(Critère de Cauchy)*

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall p \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N \implies |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\sum u_n \text{ cv} &\iff S_n \text{ converge}\\ &\iff (S_n) \text{ est une suite de Cauchy}\\ &\iff \forall \varepsilon > 0,\, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall p \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N \implies |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon. \ \square\end{aligned}$$

Remarque

1) On ne modifie pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de ses termes. C'est-à-dire $v_0, v_1, \cdots, v_{n_0}$ et $n \geq n_0 + 1$ $v_n = u_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2) Soit $\sum u_n$ une série convergente. On appelle reste d'ordre n de la série $\sum u_n$ la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1} u_{n+p}$. Les sommes partielles d'ordre p sont notées $r_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}$.

   On note $R_n = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} r_p = \sum_{k=1}^{+\infty} u_{n+k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

   On a $S = S_n + R_n$. En effet $S_{n+p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k = S_n + r_p$. En faisant tendre p vers l'infini on trouve l'égalité.

1.2.2. Séries absolument convergentes

Définition 1.6. *La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

Théorème 1.7. *Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors $\sum u_n$ converge dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, $S_n^{'} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |u_k|$. $\sum |u_n|$ converge donc elle vérifie le critère de Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall p \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N \implies ||u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+p}|| < \varepsilon.$$

Or $|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+p}| < \varepsilon$. Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall p \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N \implies |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Donc $\sum u_n$ vérifie le critère de Cauchy. Alors $\sum u_n$ converge. $\square$

1.3. Séries à termes positifs

1.3.1. Définition et propriétés

Définition 1.8. *Une série* $\sum u_n$ *est dite à termes positifs si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Proposition 1.9. *Soit* $\sum u_n$ *à termes positifs.*

i) La suite des sommes partielles de $\sum u_n$ *est croissante.*
En effet $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$. *Or* $u_{n+1} \geq 0$. *D'où* $S_{n+1} \geq S_n$.

ii) $\sum u_n$ *converge si et seulement si il existe* $M \in \mathbb{R}_+$ *tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n \leq M.$$

En effet $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} u_k.$

1.3.2. Comparaison d'une série avec une intégrale généralisée

On considère $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue avec $a \geq 0$.

Théorème 1.10. *Si* f *est positive, décroissante alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *est de même nature que la série* $\sum f(n)$.

Démonstration $\mathbb{R}$ étant archimédien, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \geq a$. Pour tout $n \leq t \leq n+1$, f étant décroissante, on a $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$. En intégrant les inégalités prédentes entre n et $n+1$, on obtient :

$$\int_n^{n+1} f(n+1)dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \int_n^{n+1} f(n)dt.$$

Ce qui donne $f(n+1) \leq \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$.

En partant de n_0 et en sommant membre à membre les différentes inégalités, on trouve :

$$\sum_{k=n_0+1}^{n+1} f(k) \leq \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k).$$

Si $\sum f(n)$ converge alors il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq M$.

Donc pour tout $x \geq n_0$ on a $\int_{n_0}^{x} f(t)dt \leq M$. Ce qui entraîne que $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ converge. Donc $\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Réciproquement si $\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Or $\int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$.

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \qquad \sum_{k=n_0+1}^{n+1} f(k) \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt = M < +\infty.$$

D'où $\sum f(n)$ converge. □

Application : Séries de Riemann. On considère $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

On pose $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, positive avec $f^{'}(x) = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$.

- Si $\alpha < 0$, f est strictement croissante.
  Si on pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Donc (u_n) ne tend pas vers 0.
  D'où $\sum u_n$ diverge.
- Si $\alpha = 0$, on a $u_n = 1 \neq 0$. D'où $\sum u_n$ diverge.
- Si $\alpha > 0$, f est strictement décroissante. Donc $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature. Or d'après l'étude faite au Chapitre intégrales généralisées, $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
  D'où $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice : Montrer que $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ n'est pas absolument convergente pour $\alpha \leq 1$.

1.3.3. Comparaison entre la convergence de séries à termes positifs

Théorème 1.11. *Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum w_n$ des séries à termes positifs tels que : $v_n \leq u_n \leq w_n$ alors*

i) si $\sum w_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

ii) si $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration

i) On suppose que $\sum w_n$ converge.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} w_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} w_k < +\infty$. Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} w_k$.

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} w_k < +\infty.$$

D'où $\sum u_n$ converge et en plus $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} w_k$.

ii) On suppose que $\sum v_n$ diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Comme $\sum v_n$ est à termes positifs, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k = +\infty$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$. D'où $\sum u_n$ diverge. $\square$

Exemple : On considère la série $\sum \sin(\frac{1}{n^2})$.

On pose $u_n = \sin(\frac{1}{n^2})$ pour tout $n \geq 1$.

On a $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$ (étudier la fonction $\sin(x) - x$).

Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Par conséquent $\sum u_n$ est absolument convergente.

1.4. Régles de convergence

1.4.1. Régle de D'Alembert

Théorème 1.12. *Soit $\sum u_n$ une série numérique et $l \in \overline{\mathbb{R}}_+$ tels que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l,$$

alors

i) si $l < 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

ii) si $l > 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.

Attention : La régle de D'Alembert ne permet pas de conclure dans le cas $l = 1$. En effet

- $\sum \frac{1}{n}$ diverge. En posant $u_n = \frac{1}{n}$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
- $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. En posant $u_n = \frac{1}{n^2}$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Démonstration

i) On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$ avec $0 \leq l < 1$.
Comme $l < 1$, il existe $\nu > 0$ tel que $l + \nu < 1$.

$$\nu > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N \implies \left|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - l\right| < \nu.$$

Donc pour tout $n \geq N$ on a

$$l - \nu < \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < l + \nu \implies |u_{n+1}| < (l+\nu)|u_n|.$$

Ce qui entraîne par récurrence que pour tout $n \geq N$

$$|u_n| < (l+\nu)^{n-N}|u_N| = (l+\nu)^n \frac{u_N}{(l+\nu)^N}.$$

Or $\sum (l+\nu)^n \frac{u_N}{(l+\nu)^N}$ est une série géométrique de raison $(l+\nu) < 1$, donc elle converge. D'où $\sum u_n$ est absolument convergente.

ii) On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$ avec $l > 1$. Il existe $\mu > 0$ tel que $l - \mu > 1$.

$$\mu > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N \implies \left|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - l\right| < \mu.$$

Donc pour tout $n \geq N$ on a

$$l - \mu < \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < l + \mu \implies |u_{n+1}| > (l-\mu)|u_n|.$$

Ce qui entraîne par récurrence que pour tout $n \geq N$

$$|u_n| > (l-\mu)^{n-N}|u_N| = (l-\mu)^n \frac{u_N}{(l-\mu)^N}.$$

Comme $l - \mu > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$. Donc u_n ne tend pas vers 0. D'où $\sum u_n$ diverge. □

Exemple : On considère la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$. On pose $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$.

- Si $x = 0$, on a $u_0 = 1$ et $u_n = 0$ pour $n \geq 1$. Donc $\sum u_n$ converge.
- Si $x \neq 0$, on a $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{|x|}{n+1}$. Ce qui donne

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

Donc $\sum u_n$ est absolument convergente.

1.4.2. Régle de Cauchy

Théorème 1.13. *Soit $\sum u_n$ une série numérique et $l \in \overline{\mathbb{R}}_+$ tels que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l,$$

alors

i) si $l < 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

ii) si $l > 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.

Démonstration

i) On suppose que $l < 1$, donc il existe $\nu > 0$ tel que $l + \nu < 1$.

$$\nu > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq N \implies \left|\sqrt[n]{|u_n|} - l\right| < \nu.$$

Donc pour tout $n \geq N$ on a

$$l - \nu < \sqrt[n]{|u_n|} < l + \nu \implies |u_n| < (l+\nu)^n.$$

Or $\sum (l+\nu)^n$ est une série géométrique de raison $0 \leq l + \nu < 1$. Donc elle converge. D'où $\sum u_n$ converge.

ii) On suppose que $l > 1$, donc il existe $\mu > 0$ tel que $l - \mu > 1$.

$$\mu > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq N \implies \left|\sqrt[n]{|u_n|} - l\right| < \mu.$$

Donc pour tout $n \geq N$ on a

$$l - \mu < \sqrt[n]{|u_n|} < l + \mu \implies |u_n| > (l-\nu)^n.$$

Comme $(l-\nu) > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$. Donc u_n ne tend pas vers 0. D'où $\sum u_n$ diverge. $\square$

Attention : Pour $l = 1$ la régle de Cauchy ne donne pas de résultat. En effet

- $\sum \frac{1}{n}$ diverge. En posant $u_n = \frac{1}{n}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(\frac{1}{n})} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{\ln(n)}{n}} = 1.$$

- $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. En posant $u_n = \frac{1}{n^2}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to+\infty} e^{-2\frac{\ln(n)}{n}} = 1.$$

1.4.3. Régle des équivalents

Théorème 1.14. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques telles que $u_n \sim v_n$ en $+\infty$.*

i) Si $\sum v_n$ est absolument convergente alors $\sum u_n$ est aussi absolument convergente.

ii) Si v_n garde un signe constant à partir d'un certain rang alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration

i) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|u_n|}{|v_n|} = 1$.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq N \implies \left|\frac{|u_n|}{|v_n|} - 1\right| < \frac{1}{2}.$$

Donc pour tout $n \geq N$ on a $\frac{1}{2}|v_n| < |u_n| < \frac{3}{2}|v_n|$.

Comme $\sum |v_n|$ converge alors $\sum |u_n|$ converge.

D'où $\sum u_n$ est absolument convergente.

ii) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq N_0 \implies \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| < \frac{1}{2}.$$

Donc pour tout $n \geq N_0$ on a $\frac{1}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3}{2}$. D'où pour tout $n \geq N_0$ u_n et v_n ont le même signe.

Soit N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$ v_n garde un signe constant.

Soit $N_2 = \max\{N_0, N_1\}$. Alors si $n \geq N_2$ u_n garde un signe constant identique au signe de v_n.

On suppose que pour tout $n \geq N_2$, $v_n \geq 0$. On a $\frac{1}{2}v_n < u_n < \frac{3}{2}v_n$.

Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Si $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n$ diverge aussi. $\square$

Exemple : On considère la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

On pose pour tout $n \geq 1$, $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. On a $u_n \sim \frac{1}{n^2}$.

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est absolument convergente. Donc $\sum u_n$ est absolument convergente.

Exercices :

1) Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum n \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right), \quad \sum \frac{\sin(n)}{n^2}, \quad \sum \left(1-\cos\frac{1}{n}\right) e^n \sinh\frac{1}{n}, \quad \sum \frac{1}{n\ln n}.$$

2) On considère $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$.

   Montrer que (S_n) converge.

   Indication : Utiliser la série de terme général $u_n = S_n - S_{n-1}$.

1.5. Séries semi-convergentes, Séries alternées

Définition 1.15. *Une série $\sum u_n$ est dite semi-convergente si $\sum u_n$ est convergente et $\sum |u_n|$ est divergente.*

Définition 1.16. *Une série $\sum u_n$ est dite alternée si pour tout n, u_n et u_{n+1} sont de signe contraire.*

Exemple : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Théorème 1.17. *Si $\sum u_n$ est une série alternée telle que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et tend vers 0 alors $\sum u_n$ est convergente.*

Démonstration On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = S_{2n}$ et $W_n = S_{2n+1}$. Montrons que les suites (V_n) et (W_n) sont adjacentes. Supposons que $u_0 \geq 0$. Donc $u_{2k} = |u_{2k}|$ et $u_{2k+1} = -|u_{2k+1}|$.

On a

$$V_{n+1} - V_n = S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0$$

car d'après l'hypothèse $(|u_n|)$ est décroissante. Donc (V_n) décroit.

$$W_{n+1} - W_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geq 0.$$

Donc (W_n) est croissante.

On a aussi

$$\lim_{n\to+\infty}(V_n - W_n) = \lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_{2n+1}) = \lim_{n\to+\infty} -u_{2n+1} = 0.$$

Les deux suites sont adjacentes, donc elles convergent dans $\mathbb{R}$ vers la même limite. D'où (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers le même nombre réel S. Donc (S_n) converge vers S. D'où $\sum u_n$ est convergente. □

Remarque $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

- $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$u_{2n+1} \leq S - S_{2n} \leq 0 \implies |S - S_{2n}| \leq |u_{2n+1}|.$$

- $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$0 \leq S - S_{2n+1} \leq u_{2n+2} \implies |S - S_{2n+1}| \leq |u_{2n+2}|.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|S - S_n| \leq |u_{n+1}|$.

Exemples : $\sum(-1)^n\sqrt{n}$, $\sum \dfrac{(-1)}{n}$, $\sum \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$, $\sum(-1)^n \sin\dfrac{1}{n}$.

1.6. Séries produits et séries dans $\mathbb{C}$

1.6.1. Séries produits

Définition 1.18. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On appelle série produit des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}v_k$.*

Théorème 1.19. *(Tests de Dirichlet)*

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive et décroissante vers zéro et soit $\sum u_n$ telle que ses sommes partielles sont bornées. Alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

Démonstration Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. D'après notre hypothèse sur la série $\sum u_n$, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|S_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\varepsilon > 0$, d'après l'hypothèse sur la suite (v_n), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $v_n < \frac{\varepsilon}{2M}$.

La formule des sommes partielles donne pour tout $m > n \geq N$:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n}^{m} u_k v_k\right| &= |u_n v_n + u_{n+1}v_{n+1} + \cdots + u_m v_m| \\ &= |-S_{n-1}v_n + S_n(v_n - v_{n+1}) + \cdots + S_{m-1}(v_{m-1} - v_m) + S_m v_m| \\ &\leq |-S_{n-1}v_n| + |S_n(v_n - v_{n+1}| + \cdots + |S_{m-1}(v_{m-1} - v_m)| + |S_m v_m| \\ &\leq M(v_n + (v_n - v_m) + v_m) \leq 2M v_n < \varepsilon.\end{aligned}$$

Le critère de Cauchy étant satisfait par $\sum u_n v_n$, alors on a sa convergence. □

Théorème 1.20. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors $\sum w_n$ est absolument convergente et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Démonstration A faire... □

Applications : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. A-t-on $e^{x+y} = e^x \times e^y$?

Soit $u_k(x) = \frac{x^k}{k!}$. Soit

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(y)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} w_k.$$

w_k est le terme général de la série produit des séries absolument convergentes $\sum u_k(x)$ et $\sum u_k(y)$. Donc

$$\begin{aligned}w_k &= \sum_{l=0}^{k} u_{k-l}(x)u_l(y) = \sum_{l=0}^{k} \frac{x^{k-l}}{(k-l)!}\frac{y^l}{l!} = \frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{(k-l)!l!}x^{k-l}y^l \\ &= \frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k} C_k^l x^{k-l}y^l = \frac{1}{k!}(x+y)^k = u_k(x+y).\end{aligned}$$

D'où le résultat.

1.6.2. Séries dans $\mathbb{C}$

Définition 1.21. *On appelle série dans $\mathbb{C}$, la série $\sum u_n$ où $u_n = u_n^1 + iu_n^2$ avec $u_n^1,\ u_n^2 \in \mathbb{R}$.*

Théorème 1.22. *Soit $\sum u_n$ une série dans $\mathbb{C}$ avec $u_n = u_n^1 + iu_n^2$.*

i) $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum u_n^1$ et $\sum u_n^2$ convergent. En plus si $\sum u_n$ converge on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^1 + i\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$.

ii) Si $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration To Do. □

Remarque Conséquence du ii), toutes les régles avec des modules s'appliquent.

Applications : Exponentielle complexe.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on justifie la définition de $e^z = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$.

Soit $u_k(z) = \dfrac{z^k}{k!}$.

- Pour $z = 0$, on a $u_0 = 1$ et $u_k(0) = 0$ pour tout $k \geq 1$.

  Donc $\sum u_k(0)$ est absolument convergente et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(0) = 1$. D'où $e^0 = 1$.

- Pour $z \neq 0$, on a

$$\left|\frac{u_{k+1}(z)}{u_k(z)}\right| = \frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{|z|^k} = \frac{|z|}{k+1} \to 0 \quad \text{quand } k \to +\infty.$$

Donc d'après la régle de D'Alembert $\sum u_k(z)$ est absolument convergente.

La fonction $z \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ est bien définie sur $\mathbb{C}$.

On pose $e^z = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$. On montre que pour tout $z,\ z' \in \mathbb{C}$, on a $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

On reprend les mêmes calculs que dans $\mathbb{R}$.

Exercices :

1) Montrer que $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.
2) Montrer que $|e^{ix}| = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3) Déterminer $|e^z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.