UNIVERSITÉ GASTON BERGER DE SAINT-LOUIS
U.F.R de Sciences Appliquées et de Technologie
Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Informatique
(LANI)

Cours d'Analyse III, Licence Math en Ligne
Convergence simple et convergence uniforme

Auteur : Mamadou Sy
LANI et Section Mathématiques Appliquées, UFR SAT.

Chapitre 1

Convergence simple et convergence uniforme

1.1. Convergence simple

On considère X une partie de $\mathbb{R}$ non vide.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : X \to \mathbb{R}$, pour tout $x \in X$, $f_n(x) \in \mathbb{R}$.

Exemple : $f_n(x) = e^{-nx^2}$; $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(x) = \dfrac{1}{n+x}$, $x \geq 0$.

Définition 1.1. *Soit (f_n) une suite d'applications de X à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite (f_n) converge simplement au point $x_0 \in X$ si la suite numérique $(f_n(x_0))$ converge dans $\mathbb{R}$.*

Si pour tout point de X, (f_n) converge simplement, on dit que (f_n) converge simplement sur X.

Exemple :

1) $f_n(x) = e^{-nx^2}$. Pour $x = 0$, $f_n(0) = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$.

   Pour $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Le domaine de convergence de f est $\mathbb{R}$.

2) $g_n(x) = \dfrac{1}{n+x}$, $x \geq 0$. On a $0 \leq g_n(x) \leq \dfrac{1}{n}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = 0$.

Si (f_n) converge simplement sur X, on définit une fonction f en posant : pour tout $x \in X$, $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

f est appelée la "limite simple" de (f_n) sur X. On dit encore que (f_n) converge simplement (CS) vers f sur X.

1.2. Convergence uniforme

Définition 1.2. *Soit* $(f_n) : X \to \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$.

On dit que (f_n) *converge uniformément (CU) vers* f *sur* X *si on a :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Proposition 1.3. *Si* (f_n), $f : X \to \mathbb{R}$ *et si* (f_n) *converge uniformément sur* X *vers* f *alors* (f_n) *converge simplement sur* X *vers* f.

Démonstration (f_n) CU vers f sur X. Donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, \implies \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

$x_0 \in X$. A-t-on $f_n(x_0) \to f(x_0)$?

Pour $n \geq N$, on a $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.

D'où (f_n) CS vers f sur X. □

Proposition 1.4. (f_n) *CU vers* f *sur* X *si et seulement si* $\sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$ *tend vers* 0 *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

Démonstration Elle est laissée au lecteur. Il suffit d'écrire! □

Proposition 1.5. (f_n) *CU vers* f *sur* X *si et seulement si il existe une suite* $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{R}_+$ *telle que :*

i) $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$,

ii) $\forall x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$.

Démonstration Encore laissée au lecteur. Indication : Suite à fabriquer! □

Exemples :

1) $f_n(x) = e^{-nx^2}$. On a (f_n) CS vers f avec $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour $x \neq 0$.

On pose

$$h_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ e^{-nx^2} & x \neq 0. \end{cases}$$

Le tableau de variation de la fonction $h_n(x)$ pour $x \neq 0$ donne $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} h_n(x) = 1$. Donc sa limite quand n tend vers l'infini est égale à $1 \neq 0$.

D'où (f_n) ne converge pas uniformément vers f.

2) $g_n(x) = \dfrac{1}{n + x}$ pour $x \geq 0$. On sait déjà que (g_n) CS vers $g = 0$ sur $\mathbb{R}_+$. D'après ce qui précéde on a $0 \leq g_n(x) \leq \dfrac{1}{n}$. Posons $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$. Donc $|g_n(x) - g(0)| \leq \varepsilon_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$. D'après la Proposition 1.5, (g_n) CU vers g sur $\mathbb{R}_+$.

Attention!! La CS n'entraîne pas la CU.

1.3. Relation entre convergence uniforme et continuité

Théorème 1.6. *Soient $f_n : X \to \mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in X$.*

Si (f_n) CU vers f sur X et si chaque f_n est continue au point x_0 alors f est continue au point x_0.

Démonstration Soit $x_0 \in X$. f_n continue au point x_0 et (f_n) CU vers f sur X. On écrit :

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f(x_0) \\ &= (f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(x_0)) + (f_n(x_0) - f(x_0)). \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. (f_n) CU vers f. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ alors $\forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

En particulier

$$\forall x \in X \quad |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

f_N est continue au point $x_0 \in X$. Donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in X$ et $|x - x_0| < \eta$ alors

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |(f(x) - f_N(x)) + (f_N(x) - f_N(x_0)) + (f_N(x_0) - f(x_0))| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où f est continue au point $x_0 \in X$. □

Proposition 1.7. *On considère $f_n : X \to \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ et $\bar{x} \in X$.*

Si (f_n) CS vers f sur X et si chaque f_n est continue au point $\bar{x}$ alors s'il existe une suite (x_n) d'éléments de X convergente vers $\bar{x}$ et telle que $(f_n(x_n))$ ne converge pas vers $f(\bar{x})$ alors (f_n) ne converge pas uniformément vers f.

Démonstration On fait une preuve par transposition.

On suppose que f_n est continue au point $\bar{x}$ et (f_n) CU vers f.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$.

D'après le Théorème 1.6 f est continue au point $\bar{x}$. Donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \,/\, \forall x \in X \text{ et } |x - \bar{x}| < \eta \implies |f(x) - f(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$. Ce qui donne

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N_1 \implies |x_n - \bar{x}| < \eta.$$

Donc pour tout $n \geq N_1$ on a $|f(x_n) - f(\bar{x})| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

(f_n) CU vers f. Donc

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_2 \implies \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On pose $N = \max\{N_1, N_2\}$. Pour tout $n \geq N$ on a

$$|f(x_n) - f(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ donc } |f_n(x_n) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc pour $n \geq N$

$$\begin{aligned}
|f_n(x_n) - f(\bar{x})| &= |(f_n(x_n) - f(x_n)) + (f(x_n) - f(\bar{x}))| \\
&\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(\bar{x})| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(\bar{x})$. □

Exemple : On considère la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$.

(f_n) CS vers f avec $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour $x \neq 0$.

Soit $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

On a $f_n(x_n) = \dfrac{1}{2}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = \dfrac{1}{2} \neq f(0) = 1$.

Conclusion : (f_n) ne converge pas uniformément vers f.

1.4. Convergence uniforme et intégration

Théorème 1.8. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On considère $(f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.*

Si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors f est intégrable sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt$.

Démonstration D'après le Théorème 1.6, f est continue sur $[a, b]$, donc f est intégrable sur $[a, b]$.

(f_n) CU vers f :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies \forall x \in [a, b] \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt\right| = \left|\int_a^b (f_n(t) - f(t))dt\right| &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t))|dt \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dt = \varepsilon.\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

1.5. Critère de Cauchy

Définition 1.9. *Soit $(f_n) : X \to \mathbb{R}$. On dit que (f_n) vérifie le critère de Cauchy si on a :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall p, q \geq N \implies \forall x \in X \quad |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon.$$

Théorème 1.10. *(de Cauchy)*

(f_n) converge uniformément sur X si et seulement si (f_n) vérifie le critère de Cauchy.

Démonstration On suppose que (f_n) CU vers $f : X \to \mathbb{R}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N \implies \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $p, q \geq N$.

$$\forall x \in X \quad |f_p(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |f_q(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}|f_p(x) - f_q(x)| &= |(f_p(x) - f(x)) + (f(x) - f_q(x))| \\ &\leq |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

D'où (f_n) vérifie le critère de Cauchy.

La réciproque. On suppose que (f_n) satisfait le critère de Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall p, q \geq N \implies \forall x \in X \quad |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon.$$

Soit $x_0 \in X$, $(f_n(x_0))$ vérifie : $p, q \geq N \implies |f_p(x_0) - f_q(x_0)| < \varepsilon$.

On pose $f(x_0) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_0)$. Pour $n, p \geq N$ on a $|f_n(x_0) - f_p(x_0)| < \varepsilon$.

Quand p tend vers l'infini on trouve $|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ pour tout $x_0 \in X$. Donc (f_n) CU vers f sur X. □

1.6. Convergence uniforme et dérivation

Théorème 1.11. *Soient $(f_n) : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $g : I \to \mathbb{R}$, avec I partie non vide de $\mathbb{R}$ telles que :*

i) (f_n) converge simplement vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$,

ii) $(f_n^{'})$ converge uniformément vers g sur I,

alors f est dérivable et $f^{'} = g$.

Démonstration Posons

$$\begin{cases} \varphi_n(x) = \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0 \\ \varphi_n(x_0) = f_n^{'}(x_0). \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$ est continue.

On pose

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0 \\ \varphi(x_0) = g(x_0). \end{cases}$$

Montrons d'abord que (φ_n) CS vers φ.

$$\begin{array}{ll} x \neq x_0 & \varphi_n(x) \to \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \varphi(x) \\ x = x_0 & \varphi_n(x_0) = f_n^{'}(x_0) \to g(x_0) = \varphi(x_0). \end{array}$$

Montrons maintenant que (φ_n) CU vers φ.

Comme $(f_n^{'})$ CU vers g donc elle vérifie le critère de Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall p, q \geq N \implies \forall t \in I \quad |f_p^{'}(t) - f_q^{'}(t)| < \varepsilon.$$

Pour $x > x_0$, on intégre l'inégalité $-\varepsilon < f_p^{'}(t) - f_q^{'}(t) < \varepsilon$ entre x_0 et x et on obtient

$$-\varepsilon < \varphi_p(x) - \varphi_q(x_0) < \varepsilon \iff |\varphi_p(x) - \varphi_q(x_0)| < \varepsilon.$$

(φ_n) vérifie le critère de Cauchy. Donc (φ_n) CU vers φ. On a, d'après le Théorème 1.6, φ est continue. Alors φ est continue en x_0. Donc $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$. D'où $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g(x_0)$. Ce qui donne $f^{'}(x_0) = g(x_0)$. $\square$

1.7. Exemple d'evn complet de dimension infinie

Définition 1.12. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E, une application $\mathbf{N} : E \to \mathbb{R}_+$ telle que :*

i) $\forall x \in E$, $\mathbf{N}(x) = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.

ii) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathbf{N}(x)$.

iii) $\forall x \in E$, $\forall y \in E$, $\mathbf{N}(x+y) \leq \mathbf{N}(x) + \mathbf{N}(y)$.

Soit a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On note $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$. $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Soit $f \in E$, $\|f\|_\infty = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|$. On a $\|\|_\infty$ est une norme sur E.

On dit que $(E, \|\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

Théorème 1.13. $(E, \|\|_\infty)$ *est un* $\mathbb{R}$ *espace vectoriel normé complet.*

Démonstration Soit (f_n) une suite de Cauchy de $(E, \|\|_\infty)$. On doit montrer que cette suite converge dans $(E, \|\|_\infty)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall p, q \geq N \implies \|f_p - f_q\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |f_p(t) - f_q(t)| < \varepsilon.$$

Donc pour tout p, $q \geq N$, on a pour tout $t \in [a,b]$, $|f_p(t) - f_q(t)| < \varepsilon$. (f_n) satisfait le critère de Cauchy, donc (f_n) converge uniformément vers une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Or chaque f_n est continue donc f est continue. D'où $f \in E$. En faisant tendre p ou q vers $+\infty$, on obtient $f_n \to f$ dans E. D'où E est complet. $\square$