UNIVERSITÉ GASTON BERGER DE SAINT-LOUIS
U.F.R de Sciences Appliquées et de Technologie
Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Informatique
(LANI)

# Cours d'Analyse III, Licence Math en Ligne
# Intégrales généralisées

**Auteur :** Mamadou Sy
*LANI et Section Mathématiques Appliquées, UFR SAT.*

# Chapitre 1

# Intégrales généralisées

## 1.1. Définitions et propriétés élémentaires

**Définition 1.1.** *Soit* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *avec* $a < b$. *Soit* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *continue.*

- *Si* $\int_a^x f(t)dt$ *admet une limite réelle lorsque* $x$ *tend vers* $b$, *on dit que l'intégrale généralisée de* $f$ *sur* $[a, b[$, *que l'on note* $\int_a^b f(t)dt$, *converge et on pose :*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt.$$

- *Si* $\int_a^x f(t)dt$ *n'admet pas de limite dans* $\mathbb{R}$, *on dit que l'intégrale généralisée* $\int_a^b f(t)dt$ *diverge.*

*Remarque* On a la même définition pour $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$, $f : ]a, b] \to \mathbb{R}$ continue. L'intégrale généralisée est définie par $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)dt$.

**Exemple** :

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

   La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

   On pose $F(X) = \int_1^X \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^X x^{-\alpha} dx$.

Si $\alpha = 1$, on a $F(X) = \displaystyle\int_1^X \frac{dx}{x} = [\ln(x)]_1^X = \ln(X)$.

Donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{dx}{x} = +\infty$.

Si $\alpha \neq 1$, $F(X) = \displaystyle\int_1^X x^{-\alpha}dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^X = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{X^{\alpha-1}} - 1\right]$.

Alors la limite existe si et seulement si $\alpha - 1 > 0$ c'est-à-dire $\alpha > 1$. Donc elle diverge si et seulement si $\alpha \leq 1$.

2) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$.

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ est continue sur $]a, b] \to \mathbb{R}$.

On a $F(x) = \displaystyle\int_x^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \int_x^b (t-a)^{-\alpha}dt$.

Si $\alpha = 1$, on obtient $F(x) = \ln(t-a)|_x^b = \ln(b-a) - \ln(x-a)$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to a^+} F(x) = +\infty$. D'où $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{t-a}$ diverge.

Si $\alpha \neq 1$, $F(x) = \left.\dfrac{(t-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_x^b = \dfrac{1}{1-\alpha}\left[-(x-a)^{1-\alpha} + (b-\alpha)^{1-\alpha}\right]$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to a} F(x)$ existe si et seulement si $1 - \alpha > 0$ c'est-à-dire $\alpha < 1$.

Alors la limite existe si et seulement si $\alpha < 1$.

L'intégrale diverge si et seulement si $\alpha \geq 1$.

### 1.1.1. Propriétés

On considère $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $a < b$.

**Proposition 1.2.**
*$\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si il existe $c \in [a, b[$ tel que $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ converge.*

**Démonstration** Soit $x \in [a, b[$. Il suffit d'écrire la relation de Chasles.

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt. \qquad \square$$

**Proposition 1.3.** *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ positive et continue.*

$\int_a^b f(t)dt$ *converge si et seulement si il existe* $M \in \mathbb{R}_+$ *tel que*

$$\forall x \in [a, b[ \quad 0 \leq \int_a^x f(t)dt \leq M.$$

*En plus on a, si* $\int_a^b f(t)dt$ *converge,* $\int_a^b f(t)dt = \sup_{x\in[a,b[} \int_a^x f(t)dt.$

**Démonstration** Soit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$; $F$ est positive et croissante. Il suffit d'écrire! L'un des sens est trivial ( $\int_a^b f(t)dt$ converge).

Par ailleurs $\lim_{x\to b} F(x) = \sup_{a\leq x<b} F(x) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\{F(x) \,/\, a \leq x < b\}$ est majoré. $M$ étant un majorant, la preuve se termine. □

**Proposition 1.4.** *Soient* $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}_+$ *continues telles que :*

$$\forall x \in [a, b[ \quad 0 \leq g(x) \leq f(x)$$

*alors :*

*i) Si* $\int_a^b f(x)dx$ *converge alors* $\int_a^b g(x)dx$ *converge.*

*ii) Si* $\int_a^b g(x)dx$ *diverge alors* $\int_a^b f(x)dx$ *diverge.*

**Démonstration** On a, pour tout $X \in [a, b[$, $\int_a^X g(x)dx \leq \int_a^X f(x)dx$. □

**Exemple** : On considère l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$. Est-elle convergente?

On sait d'après le développement limité que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$ on a $e^u \geq u$. Donc $e^{x^2} \geq x^2$. Ce qui donne $\frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{x^2}$.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge car $\alpha = 2$ (voir ce qui précéde).

Donc, d'après la Proposition 1.4, on a $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est convergente.

D'après la Proposition 1.2, on a $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est convergente.

**Exercice** : Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^2}dx$ converge.

### 1.1.2. Intégrales généralisées absolument convergentes

**Définition 1.5.** *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument si l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.*

**Théorème 1.6.** *(Critère de Cauchy)*

*Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue. $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists c \in [a,b[\,/\,\forall x,\, \forall x'\,/\, c < x < b, \quad c < x' < b \implies |\int_x^{x'} f(t)dt| < \varepsilon.$$

**Démonstration**

$b = +\infty$ : $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists c > a\,/\,\forall x \geq c,\, \forall y \geq c \implies |\int_x^y f(t)dt| < \varepsilon.$$

On suppose que le critère de Cauchy est vrai.

On pose $I_n = \int_a^n f(t)dt$ avec $n > a$. $(I_n)$ est une suite numérique.

Montrons que $(I_n)$ converge dans $\mathbb{R}$. Pour cela on montre que $(I_n)$ est une suite de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$, $\int_a^b f(t)dt$ vérifie le critère de Cauchy. Donc il existe $c > a$ tel que pour tous $x > a$, $y > a$ alors $|\int_x^y f(t)dt| < \varepsilon$.

$\mathbb{R}$ étant archimédien, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > c$. Donc pour tout $n \geq N$ on a $n > c$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $n + p > c$. D'où $|\int_n^{n+p} f(t)dt| < \varepsilon$.

En utilisant la relation de Chasles, on obtient

$$|I_{n+p} - I_n| = |\int_a^{n+p} f(t)dt - \int_a^n f(t)dt| = |\int_n^{n+p} f(t)dt| < \varepsilon.$$

Donc $(I_n)$ est une suite de Cauchy. D'où $(I_n)$ converge dans $\mathbb{R}$.

Posons

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to+\infty} I_n \in \mathbb{R} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^n f(t)dt. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}|\int_a^x f(t)dt - I| &= |\left(\int_a^x f(t)dt - \int_a^n f(t)dt\right) + \left(\int_a^n f(t)dt - I\right)| \\ &\leq |\int_n^x f(t)dt| + |I_n - I|.\end{aligned}$$

D'après le critère de Cauchy, il existe $c > a$ tel que pour tous $y, y' > c$ alors $|\int_y^{y'} f(t)dt| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme $I_n$ tend vers $I$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ alors $|I_n - I| < \frac{\varepsilon}{2}$.

On pose $N_0 = \max\{c, N\}$.

Pour tous $x > N_0$, $n > N_0$ alors $|\int_n^x f(t)dt| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|I_n - I| < \frac{\varepsilon}{2}$.

D'où $|\int_a^x f(t)dt - I| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt = I$.

La réciproque.

On suppose que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge. On pose $J = \int_a^{+\infty} f(t)dt$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $c > a$ tel que tout $x > c$ alors $|\int_a^x f(t)dt - J| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $x$, $x' > c$. On a

$$\begin{aligned}|\int_x^{x'} f(t)dt| = |\int_a^{x'} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt| &= |(\int_a^{x'} f(t)dt - J) + (J - \int_a^x f(t)dt)| \\ &\leq |\int_a^{x'} f(t)dt - J| + |J - \int_a^x f(t)dt| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square\end{aligned}$$

**Théorème 1.7.** *Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ continue, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a < b$.*

*Si $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.*

**Démonstration** En exercice. □

**Définition 1.8.** *On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est semi-convergente si $\int_a^b f(t)dt$ converge et $\int_a^b f(t)dt$ n'est pas absolument convergente.*

**Exemple** : Intégrale semi-convergente. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Posons $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$. $f : [1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ continue. On note $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$.

Une intégration par parties donne

$$F(x) = -\left.\frac{\cos(t)}{t}\right|_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt = -\frac{\cos(x)}{x} + \cos(1) - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

On a $\left|\dfrac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$. Avec $\alpha = 2 > 1$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}$ converge.

Ce qui entraîne que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| dt$ converge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ converge absolument, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ converge.

$F(x)$ a une limite lorsque $x$ tend vers $+\infty$, d'où $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

Maintenant on considère $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \left(\leq \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt\right)$.

On pose

$$\begin{aligned} L_n &= \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \\ &= \int_\pi^{2\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt + \cdots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt. \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $t = k\pi + \tau$. Ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt &= \int_0^\pi \frac{|\sin(k\pi + \tau)|}{k\pi + \tau} d\tau \\ &= \int_0^\pi \frac{|(-1)^k \sin(\tau)|}{k\pi + \tau} d\tau = \int_0^\pi \frac{|\sin(\tau)|}{k\pi + \tau} d\tau \\ &\geq \int_0^\pi \frac{\sin(\tau)}{k\pi + \pi} d\tau = \frac{1}{\pi(k+1)} \int_0^\pi \sin(\tau) d\tau = \frac{2}{\pi(k+1)}. \end{aligned}$$

Donc

$$L_n \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{\pi(k+1)} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \text{ (voir 1ère année).}$$

Alors $\lim_{n\to+\infty} L_n = +\infty$. Donc $\lim_{x\to+\infty} \int_{\pi}^{x} \frac{|\sin(t)|}{t}dt = +\infty$.

On en déduit que $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ n'est pas absolument convergente.

**Exercice** : Montrer que $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$ est semi-convergente.

## 1.2. Régles de convergence

**Théorème 1.9.** *Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$.*

*1) Si $f \sim g$ quand $x \to b$, si $\int_{a}^{b} g(t)dt$ est absolument convergente alors $\int_{a}^{b} f(t)dt$ est absolument convergente.*

*2) Si $f \sim g$ quand $x \to b$ et si $g$ a un signe constant au voisinage de $b$ alors les intégrales $\int_{a}^{b} f(t)dt$ et $\int_{a}^{b} g(t)dt$ sont de même nature (elles divergent en même temps ou elles convergent et dans ce cas absolument en même temps).*

**Démonstration**

1) $b \in \mathbb{R}$. $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. On traduit cette limite pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Donc il existe $c \in [a, b[$ tel que $c < x < b$ alors $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < \frac{1}{2}$. Ce qui entraîne que $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| - 1 < \frac{1}{2}$. D'où $|f(x)| < \frac{3}{2}|g(x)|$.

Or $\int_{a}^{b} |g(t)|dt$ converge. Donc d'après le théorème de comparaison $\int_{a}^{b} |f(t)|dt$ converge. D'où le résultat.

2) Faire en exercice en s'inspirant du 1). □

**Corollaire 1.10.**

*1) Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, $a \in \mathbb{R}$.*

*a) Si $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} f(x) = l \in \mathbb{R}^*$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors*

*$\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*

*$\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$ est divergente si et seulement si $\alpha \leq 1$.*

*b) Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0$ *alors si* $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge absolument.*

*c) Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$ *alors si* $\alpha \leq 1$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *diverge.*

*2) Soit* $a,\ b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *continue.*

*a) Si* $\lim\limits_{x\to b}(b-x)^\alpha f(x) = l \in \mathbb{R}^*$, *alors*

*si* $\alpha < 1$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *converge absolument.*

*si* $\alpha \geq 1$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *diverge.*

*b) Si* $\lim\limits_{x\to b}(b-x)^\alpha f(x) = 0$ *alors si* $\alpha < 1$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *converge absolument.*

*c) Si* $\lim\limits_{x\to b}(b-x)^\alpha f(x) = +\infty$ *alors si* $\alpha \geq 1$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *diverge.*

**Démonstration** En exercice. $\square$.

*Remarque* En $-\infty$, on a des résultats équivalents.

**Exercice** : Étude de la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^k e^{-x^2} dx$, $k \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $f(x) = x^k e^{-x^2}$. On a $x^2 f(x) = x^{k+2} e^{-x^2} \to 0$.

Première méthode : Pour $\alpha = 2 > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge absolument d'après le Corollaire 1.10.

Deuxième méthode : En faisant un développement limité de Taylor Lagrange à l'ordre $m+1$ en 0, avec $m = E(k)+1$, on obtient :

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \cdots + \frac{u^m}{m!} + \frac{u^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{u^{m+2}}{(m+2)!} e^c.$$

En prenant $u = x^2$, on trouve :

$$e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \cdots + \frac{x^{2m}}{m!} + \frac{x^{2m+2}}{(m+1)!} + \frac{x^{2m+4}}{(m+2)!} e^c.$$

En particulier

$$e^{x^2} \geq \frac{x^{2m+2}}{(m+1)!} \iff e^{-x^2} \leq \frac{(m+1)!}{x^{2m+2}} \iff x^k e^{-x^2} \leq x^k \frac{(m+1)!}{x^{2m+2}} = \frac{(m+1)!}{x^{2m-k+2}}.$$

Donc

$$x^k e^{-x^2} \leq (m+1)! \frac{1}{x^2}.$$

D'où la convergence absolue.

**Théorème 1.11.** *(Régle de Dirichlet)*

*Soient $f$ et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, telles que :*

*i) $f$ est positive décroissante et tend vers $0$ lorsque $x$ tend vers $b$,*

*ii) il existe $M > 0$ tel que :*

$$\forall x \in [a, b[, \quad \forall y \in [a, b[ \text{ alors } \left| \int_x^y g(t)dt \right| \leq M,$$

*alors $\int_a^b f(t)g(t)dt$ converge.*

**Démonstration** To do. □

**Théorème 1.12.** *(Test de Dirichlet)*

*Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b[$ telle que sa primitive $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est bornée sur $[a, b[$. Soit $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_a^b g'(t)dt$ est absolument convergente. On suppose que*

$$\lim_{x \to b^-} g(x) = 0. \tag{1.1}$$

*Alors $\int_a^b f(x)g(x)dx$ converge.*

**Démonstration** La fonction continue $fg$ est localement intégrable sur $[a, b[$. Donc il existe $c \in [a, b[$ tel que

$$\int_a^c f(x)g(x)dx = F(c)g(c) - \int_a^c F(x)g'(x)dx. \tag{1.2}$$

$F$ étant bornée, donc il existe $M \in \mathbb{R}^*$ tel que $|F(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a, b[$. Ce qui donne

$$|F(x)g'(x)| \leq M|g'(x)| \quad \forall x \in [a, b[.$$

Or $\int_a^b |g'(x)|dx < \infty$, donc $\int_a^b F(x)g'(x)dx$ est absolument convergente. En faisant tendre $c$ vers $b^-$ dans (1.2), tenant compte de (1.1), on trouve

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = -\int_a^b F(x)g'(x)dx. \qquad \square$$

**Exemple** : Soit $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$. On pose $f(t) = \frac{1}{t}$ et $g(t) = \sin(t)$.

Sur $[1, +\infty[$ $f$ est positve et décroissante et on a $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Soit $x$, $y \in [1, +\infty[$. On a $\displaystyle\int_x^y \sin(t)dt = -\cos(t)|_x^y = \cos(x) - \cos(y)$.

Donc $\displaystyle\left|\int_x^y \sin(t)dt\right| = |\cos(x) - \cos(y)| \leq 2$.

D'après le Théorème 1.11, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge.

**Exercice** :

1) Étudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ avec $\alpha > 0$.

2) Soit $\displaystyle\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

a) Montrer que $\Gamma$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ pour $x > 1$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.