Arithmétique

Construction de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Q}$

Oumar D. Mbodj[1], Augustin P. Sarr[1]

[1]Université Gaston Berger
{oumar.mbodj, augustin.sarr}@ugb.edu.sn

UFR SAT, UGB 2014

Contenu de l'unité

1. Auteurs et Institutions
2. Objectifs
3. Etude des entiers naturels $\mathbb{N}$
4. Construction de $\mathbb{Z}$
5. Construction de $\mathbb{Q}$
6. Références

Auteurs et Institutions

Oumar D. Mbodj
oumar.mbodj@ugb.edu.sn
UFR SAT UGB

Augustin P. Sarr
augustin.sarr@ugb.edu.sn
UFR SAT, UGB

Objectifs

Objectifs :

- ✓ Connaître les entiers naturels ;
- ✓ Connaître les bases de la contruction de $\mathbb{Z}$;
- ✓ Assimiler la construction de l'ensemble $\mathbb{Q}$.

Définition de $\mathbb{N}$

Les mathématiciens à défaut de pouvoir créer l'ensemble des entiers qui s'est naturellement imposé à eux, lui donnent une définition axiomatique précise. Celle-ci est due à Peano et porte son nom. Elle est donnée par :
Il existe un ensemble dit ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$, satisfaisant les propriétés suivantes :

- ✓ 0 est un entier naturel,
- ✓ Pour tout entier n, il existe un unique entier $s(n)$ appelé successeur de n,
- ✓ Aucun entier n'a 0 comme successeur,
- ✓ Deux entiers ayant le même successeur sont égaux,
- ✓ Si un ensemble d'entiers contient 0 et le successeur de chacun de ses éléments alors cet ensemble est égal à $\mathbb{N}$.

Définition de $\mathbb{N}$

Proposition

Soit A un ensemble, 0 un élément de A et s une application de A dans A. Le triplet $(A, 0, s)$ est un ensemble d'entiers naturels si et seulement si :

1. L'application s est une injection de A dans $A - \{0\}$;
2. Pour toute partie B de A, $0 \in B$ et si $s(B) \subset B$ alors $B = A$.

Exercice : Faire la démonstration de cette proposition.

Exercice : Lire les pages 1, 2 et 3 du document new.z.pdf et échanger dans le forum sur la définition de l'addition et de la multiplication de $\mathbb{N}$.

Justification de la construction de $\mathbb{Z}$

On vérifie aisément que l'addition dans $\mathbb{N}$ admet un élément neutre et est associative. Le problème qui s'est posé aux mathématiciens sur les entiers est qu'*une équation du premier degré à une inconnu, $a + x = b$, n'admet pas toujours une solution dans $\mathbb{N}$. Par exemple, l'équation $x + 3 = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.* Il devient alors intéressant de trouver le plus petit ensemble contenant $\mathbb{N}$ tel que ce genre d'équation admette toujours une solution dans cet ensemble. Cela équivaut à trouver le plus petit groupe additif, au sens de celle de $\mathbb{N}$, qui le contient.

Addition de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Lire la partie du cours "Ensembles et structures" qui présente la loi quotient et le groupe quotient. Puis vérifier que l'addition de l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ainsi définie :

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$$

est associative et admet (0,0) comme élément neutre.

Construction de $\mathbb{Z}$

On considère la relation $\mathcal{R}$ définie dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par :

$$(a, b)\ \mathcal{R}\ (c, d) \iff a + d = b + c$$

Vérifier d'abord que cette relation est compatible avec l'addition de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. L'ensemble quotient $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\mathcal{R}$, qui en résulte, se note $\mathbb{Z}$. Vous êtes invité pour mieux appréhender cette partie à lire le paragraphe **1.2** des pages 2 et 3 du document **mercer.pdf**. Poser vos questions et difficultés dans le forum.

Construction de $\mathbb{Z}$

On considère la multiplication dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par :

$$(a, b)(c, d) = (ac + bd, ad + bc)$$

Vérifier que cette multiplication est associative et admet $(1, 0)$ comme élément neutre. Vérifier aussi que la relation $\mathcal{R}$ est compatible avec cette multiplication. Elle permet donc de définir une multiplication (loi quotient qui lui est associée) dans l'ensemble quotient $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\mathcal{R}$. Vous êtes invité pour mieux appréhender cette partie à lire le paragraphe **3.2** des pages 6 et 7 du document new.z.pdf. Poser vos questions et difficultés dans le forum.

Justification de la construction de $\mathbb{Q}$

La multiplication dans l'ensemble $\mathbb{Z}^*$ est associative et admet 1 comme élément neutre. Mais une équation du premier degré à une inconnu, $ax = b$, avec $a, \ b \in \mathbb{Z}^*$ n'admet pas toujours une solution dans $\mathbb{Z}^*$; cela équivaut à dire que $\mathbb{Z}^*$, muni de la multiplication, n'est pas un groupe. D'où l'intérêt de trouver le plus petit ensemble contenant $\mathbb{Z}$ dans lequel toute équation du type $ax + b = 0$ admet une solution. Cet ensemble est un corps appelé corps des nombres rationnels et se note $\mathbb{Q}$.

Lire la dernière partie du document mercier.pdf qui expose la construction de $\mathbb{Q}$. Echanger dans le forum sur cette question et faites y part de vos difficultés.

Références

✓ Les deux documents joints.